

ORSAY

UNIVERSITE DE PARIS-SUD
CENTRE D'ORSAY

THESE

présentée

Pour obtenir

le titre de DOCTEUR 3e cycle
Spécialité : MATHEMATIQUES

par

Francis BONAHO

Sujet : Involutions et fibrés de Seifert dans les variétés de dimension 3.

Soutenue en juin 1979 devant la Commission d'examen

MM. Jean CERF, Président
François LATOUR
Larry SIEBENMANN

INTRODUCTION.

Les travaux de F. Waldhausen, K. Johannson et W. Thurston, entre autres, ayant mis en évidence l'importance des variétés de Seifert dans l'étude des variétés de dimension 3, nous nous proposons d'établir dans cette voie quelques propriétés des involutions orientées sur une variété compacte orientée de dimension 3. Principalement, nous obtiendrons pour les involutions une propriété de scindement relativement à la variété caractéristique définie par K. Johannson, ainsi qu'une bonne compréhension de toutes les involutions sur une variété de Seifert donnée (hors d'un certain nombre d'exceptions). Outre l'intérêt intrinsèque de tels problèmes, cette étude a en grande partie été motivée, au vu notamment de certains travaux de J. M. Montesinos, par l'application de ces résultats au cas du revêtement double ramifié d'un enlacement dans S^3 pour obtenir des renseignements sur l'enlacement considéré.

Nous travaillerons dans la catégorie Pl et M désignera une variété compacte orientée irréductible de dimension 3 munie d'une involution orientée τ . Nous supposerons M sans bord, essentiellement pour la commodité de l'exposition. Parmi les sous-variétés essentielles de M qui sont des variétés de Seifert, il en est une qui est universelle dans un certain

sens. C'est la variété caractéristique V qui est définie par ([Jo1]):

- (i) V admet une fibration de Seifert.
- (ii) ∂V est une réunion disjointe de tores essentiels.
- (iii) si W est une sous-variété de M dont les composantes sont des composantes de $\overline{M-V}$, alors $V \cup W$ n'admet pas de fibration de Seifert.
- (iv) toute sous-variété de M vérifiant (i) et (ii) peut être amenée à l'intérieur de V par une isotopie.

Cette variété caractéristique existe et est unique à isotopie près ([Jo2]). L'un de nos principaux résultats (théorème 3.7) est que l'on peut en général choisir la variété caractéristique V et une fibration de Seifert sur V de sorte que τ laisse V stable et que sa restriction à V soit fibrée. Pour cela, on commencera par définir au chapitre II la notion intermédiaire de "variété équivariamment caractéristique", dont on montrera l'existence et l'unicité à isotopie équivariante près. Puis nous verrons au chapitre III que la variété équivariamment caractéristique est "presque" égale à la variété caractéristique.

Le chapitre IV est consacré à l'étude des involutions sur les variétés de Seifert. Le théorème 4.1, qui est un corollaire des résultats précédents, répond à une conjecture émise par J. M. Montesinos ([Mo]): Sur une variété de Seifert munie d'une involution orientée τ , il existe en général une fibration de Seifert pour laquelle τ est fibrée. Cette propriété a été indépendamment obtenue par J. Tolleson ([To]). D'autre part, le théorème 4.2 montre que tout isomorphisme équivariant entre deux fibres de Seifert munis d'involutions fibrées peut, sous certaines conditions, être équivariamment déformé en un isomorphisme

fibré. La combinaison de ces deux résultats permet d'obtenir une classification (ici non rédigée) de toutes les involutions orientées sur une variété de Seifert n'appartenant pas à une certaine liste d'exceptions, classification que l'on peut résumer en disant que la donnée d'une involution sur une variété de Seifert équivaut à la donnée d'une involution dans la base et de quelques invariants à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Dans le chapitre V, on applique ces résultats au cas particulier où M est le revêtement double ramifié d'un enlacement K dans S^3 et où τ est l'involution de revêtement. Par passage au quotient par τ , la variété équivariamment caractéristique fournit un système d'invariants géométriques de K sous forme de configurations particulières s'exprimant simplement en fonction des enlacements toriques et des "tangles" rationnels de J. H. Conway ([Co]). En outre, les résultats du chapitre IV permettent de classifier ces configurations.

Avant de commencer ces démonstrations, nous aurons besoin de mettre en place une certaine "géométrie équivariante". Cette tâche parfois un peu fastidieuse est effectuée au chapitre I. Le lecteur pressé pourra peut-être se contenter d'un rapide survol avant de passer à la suite, quitte à revenir en arrière au gré des renvois. A titre indicatif, les points principaux semblent être les suivants: les deux lemmes de transversalité en présence d'une involution, le lemme de s -minimalité par déformation équivariante, les lemmes 1.27 à 1.30 qui montrent que les involutions sur certaines variétés simples sont "standard" et la proposition 1.37 qui donne une

des répartition des surfaces essentielles équivariantes dans une variété de Seifert munie d'une involution.

Tout au long de ce travail, j'ai bénéficié des conseils et encouragements de L. Siebenmann. Qu'il en soit ici tout particulièrement remercié, ainsi que J. M. Montesinos qui a favorisé mon introduction dans le sujet par les longs entretiens que nous avons eus au printemps 1976, J. Cerf et J. Vautour qui ont bien voulu faire partie de mon jury de thèse et tous ceux qui m'ont apporté leur soutien matériel ou moral, notamment pendant l'intermède militaire de l'année 1977-1978.

Table des matières.

1	Introduction.
5	Table des matières.
6	<u>Chapitre I: Loutien logistique.</u>
6	A. Définitions et conventions.
10	B. Généralités sur les applications PL périodiques.
14	C. Lemmes de transversalité en présence d'une involution.
18	D. Lemme de s -minimalité par déformation équivariante.
28	E. Involutions sur les S^1 -fibrés et les I -fibrés de dimension 2.
44	F. Involutions sur quelques variétés fibrées de dimension 3.
56	G. La complexité d'une variété de Seifert.
60	H. Surfaces équivariantes dans les variétés de Seifert.
71	<u>Chapitre II: La variété équivariamment caractéristique.</u>
71	A. Définitions.
72	B. Recollement le long de son bord d'une variété fibrée.
74	C. Complétion d'une S -variété essentielle équivariamment pleine.
79	D. Existence et unicité de la variété équivariamment caractéristique.
82	<u>Chapitre III: Variété caractéristique et variété équivariamment caractéristique.</u>
82	A. Existence de surfaces équivariantes essentielles.
86	B. Liaison entre la variété caractéristique et la variété équivariamment caractéristique.
101	<u>Chapitre IV: Involutions sur les variétés de Seifert.</u>
101	A. Involutions et fibrations de Seifert.
103	B. Équivalences entre involutions fibrées.
109	<u>Chapitre V: Application aux enlacements dans S^3.</u>
110	A. \mathcal{P} -variétés dans S^3 .
115	B. Surfaces $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -essentielles.
117	C. La variété $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -caractéristique de K .

Chapitre I
SOUTIEN LOGISTIQUE III.

A. Définitions et conventions.

Nous travaillerons constamment dans la catégorie PL. Par variété, on entendra variété PL compacte, connexe, orientée, irréductible (voir plus loin) de dimension 3. Un isomorphisme entre deux variétés sera un isomorphisme PL orienté entre ces deux variétés.

Une surface est une variété de dimension 2 orientable ou non. Par contre, une surface F dans une variété M sera une sous-variété de dimension 2 à qui on imposera, sauf mention explicite du contraire, d'être orientable et proprement plongée dans M , c'est à dire que $F \cap \partial M = \partial F$.

Une courbe est une variété éventuellement non connexe de dimension 1. Une courbe fermée sera une courbe connexe sans bord et un chemin une courbe connexe avec bord.

Une courbe fermée dans une variété ou une surface sera dite inessentielle si elle y borne un disque. De même, un chemin k proprement plongé dans une variété ou une surface V est inessentiel s'il existe un disque D tel que $k \subset \partial D$ et $(\partial D - k) \subset D \cap \partial V$.

On dit qu'une surface F dans une variété M est incompressible (resp. ∂ -incompressible) si toute courbe fermée (resp. chemin)

dans F inessentielle dans M est inessentielle dans F . Elle sera dite essentielle si elle est incompressible et ∂ -incompressible.

Une surface F dans une variété M sera dite parallèle vers le bord s'il existe un plongement de $F \times I$ dans M dont les intersections respectives avec F et ∂M correspondent à $F \times \{-1\}$ et $(F \times \{+1\}) \cup (\partial F \times I)$.

On dit qu'une variété est irréductible si toute sphère plongée \neq bord sur une boule. Elle est dite ∂ -irréductible si son bord est essentiel.

Une involution sera un automorphisme τ (orienté dans le cas des variétés de dimension 3) tel que $\tau^2 = \text{Id}$. En général on exclura l'identité des involutions.

Une application f entre deux variétés ou surfaces V et V' respectivement munies d'involutions τ et τ' sera qualifiée d'équivariante si $f \circ \tau = \tau' \circ f$. Une isotopie équivariante entre deux isomorphismes équivariants sera un chemin joignant l'un à l'autre dans l'espace des isomorphismes équivariants. Par abus de langage, on appelle aussi isotopie équivariante, ou déformation équivariante, tout automorphisme équivariamment isotopie à l'identité.

Il sera commode d'identifier I avec l'intervalle $[-1, +1]$ de \mathbb{R} , S^1 avec l'ensemble des nombres complexes de module 1 et D^2 avec l'ensemble des nombres complexes de module inférieur ou égal à 1

(ou $[0\pi], [0\pi]$)
Une filtration de Seifert est la donnée d'une variété et d'une partition de cette variété en fibres isomorphes à S^1 telle que toute fibre admet un isomorphisme entre un de ses voisinages

ciens et $S^1 \times D^2$ pour lequel les fibres s'identifient aux courbes paramétrées pour tout $\gamma_0 \in D^2$ par l'application

$$\gamma \in S^1 \mapsto (\gamma^\mu, \gamma_0 \gamma^\nu) \in S^1 \times D^2$$

où $\mu, \nu \in \mathbb{Z}$ sont premiers entre eux. On dira que deux fibrations de Seifert sur la même variété M sont isotopes s'il existe une isotopie de M qui envoie les fibres de l'une sur les fibres de l'autre.

L'ensemble des fibres d'une fibration de Seifert, muni de la topologie quotient, est une variété de dimension 2 que l'on appelle la base de la fibration de Seifert. Par abus de langage, on désignera aussi par le vocable de fibration de Seifert la projection canonique de la variété sur sa base.

Une application entre deux variétés munies de fibrations de Seifert sera dite fibree si elle envoie toute fibre de l'une sur une fibre de l'autre. D'après [Se], les fibrations de Seifert sont classifiées à isomorphisme fibre près par la suite d'invariants

$$(g, k | b; (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_n, \beta_n)).$$

Sans ces invariants, $g \in \mathbb{Z}$ est le genre de la base, avec la convention que $g < 0$ si la base est non orientable (par exemple, -2 pour la bouteille de Klein). L'entier $k \in \mathbb{N}$ est le nombre de composantes du bord de la base. Les couples (α_i, β_i) , que l'on peut permuter entre eux dans la notation ci-dessus, et où α_i et β_i sont deux entiers premiers entre eux tels que $1 \leq \beta_i < \alpha_i$, sont les invariants de Seifert des fibres exceptionnelles de la fibration. L'entier $b \in \mathbb{Z}$ est nul si $k \neq 0$ et s'interprète sinon comme l'obstruction à étendre une certaine section.

Une variété de Seifert est une variété qui admet au moins une fibration de Seifert. On peut montrer

([Wa 1]) qu'en dehors d'un petit nombre d'exceptions, une variété de Seifert n'admet en général qu'une seule classe d'isotopie de fibrations de Seifert. Les fibrations de ces variétés exceptionnelles peuvent en outre être classifiées à isomorphisme près par les résultats de [OVZ] (voir aussi [Or]). Ceci nous conduira parfois, et par abus, à désigner une variété de Seifert par les invariants d'une de ses fibrations.

Si A est un sous-complexe d'une variété ou surface V , la notation $U(A)$ désignera un "petit" voisinage régulier de A dans V . Si A est stable par une involution τ , on imposera à $U(A)$ d'être lui aussi stable par τ , ce qui est rendu possible par le lemme 1.2. Si A est vertical pour une certaine fibration de Seifert, on exigera la même propriété de $U(A)$.

Soit F une surface, éventuellement non orientable, proprement plongée dans une variété M . La variété \tilde{M} obtenue en découpant M le long de F sera par définition la réunion de $M - F$ et d'un revêtement d'orientation à deux feuillets de F , muni de la topologie évidente. Il sera parfois commode d'identifier \tilde{M} avec $(M - U(F))$.

B. Généralités sur les applications PL périodiques.

PROPOSITION 1.1. Soient M une variété PL compacte de dimension n et f une application PL périodique d'ordre p de M dans elle-même. Alors, pour toute triangulation T de M , il existe une triangulation plus fine que T pour laquelle f est simpliciale.

Démonstration: Puisque f est une application PL, il existe sur M ~~une triangulation T~~ une triangulation T' plus fine que T telle que f envoie linéairement chaque simplex de T' dans un simplex de T . Considérons la décomposition cellulaire C de M dont les cellules sont les éléments non vides de la forme

$$\sigma_0 \cap f(\sigma_1) \cap \dots \cap f^{p-1}(\sigma_{p-1}),$$

où $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{p-1}$ sont des simplexes de T' . Ces éléments sont bien des cellules puisqu'intersections de simplexes dans un simplex de T et l'application f envoie linéairement chaque cellule de C sur une cellule de C .

Par récurrence, on construit maintenant la triangulation cherchée sur le i -squelette $C^{(i)}$ de C . Cette construction étant triviale sur $C^{(0)}$, supposons $C^{(i-1)}$ munie d'une triangulation T_{i-1} pour laquelle la restriction de f à $C^{(i-1)}$ soit simpliciale. Soit e_i une cellule de dimension i de C , et soit k le plus petit indice non nul tel que $f^k(e_i)$ soit égal à e_i . D'après le théorème du point fixe de Lefschetz (ou un raisonnement classique d'algèbre linéaire), il existe à l'intérieur de e_i un point fixe x_0 pour f^k . Le cône en x_0 de la restriction de T_{i-1} au bord de e_i définit une triangulation de e_i coïncidant avec T_{i-1} sur le bord et pour laquelle f^k est simpliciale. La restriction de f à $C^{(i-1)}$ étant simpliciale, on peut étendre à l'aide de f cette

triangulation en une triangulation de $C^{(i-1)} \cup e_i \cup f(e_i) \cup \dots \cup f^{k-1}(e_i)$ pour laquelle la restriction de f est simpliciale. En réitérant le procédé pour un représentant de chaque classe du quotient de l'ensemble des cellules de dimension i par l'action de f , on obtient ainsi la triangulation de $C^{(i)}$ cherchée. \square

COROLLAIRE 1.2. Sous les hypothèses de la proposition 1.1, tout sous-espace PL de M stable par f admet un voisinage régulier stable par f .

Démonstration: Soit E un sous-espace PL de M stable par f . Il existe une triangulation T_1 de M dont E est un sous-complexe. La proposition 1.1 fournit une triangulation T_2 plus fine que T_1 pour laquelle f est simpliciale. Soit T_2'' la deuxième division barycentrique dérivée de T_2 . Le sous-espace E est un sous-complexe de T_2 et l'application f est encore simpliciale pour T_2'' . L'étoile fermée de E dans T_2'' est alors un voisinage régulier de E stable par f . \square

PROPOSITION 1.3. Sous les hypothèses de la proposition 1.1 et si M est de dimension inférieure ou égale à 3, l'application f est localement orthogonale au voisinage de ses points fixes, c'est à dire que pour tout point fixe x de f , il existe un voisinage U de x stable par f et un isomorphisme PL entre U et la boule standard dans \mathbb{R}^n pour lequel la restriction de f à U s'identifie à une transformation orthogonale.

Démonstration: La démonstration s'effectue en utilisant

la conclusion de la proposition en dimension strictement inférieure. Nous nous limiterons au cas de la dimension 3 en supposant la proposition démontrée en dimensions 1 et 2.

Soit T une triangulation sur M pour laquelle f est simpliciale, fournie par la proposition 1.1. Soit x un point fixe de f et soit U l'étoile fermée de x dans la triangulation T . La sous-variété U est isomorphe à la boule standard B^3 et la restriction de f à U s'identifie au cône en x de sa restriction à ∂U . Il suffit donc de démontrer le lemme suivant.

LEMME 1.4. Toute application périodique f de la sphère standard S^2 est conjuguée par un isomorphisme à une transformation orthogonale.

Démonstration: Si f n'a pas de points fixes, l'espace S^2/f quotient de S^2 par l'action de f est une surface et l'application canonique de S^2 dans S^2/f est une application de revêtement. Un calcul simple sur le groupe fondamental montre que p est nécessairement égal à 2 et que S^2/f est isomorphe à l'espace projectif \mathbb{P}^2 . On peut alors aisément construire un isomorphisme qui identifie f avec l'application antipodale de S^2 .

Si f a un point fixe et si f renverse l'orientation de S^2 , l'énoncé de la proposition 1.3 en dimension 2 montre que p est nécessairement égal à 2 et que l'ensemble des points fixes de f est une courbe fermée K dans S^2 . La courbe K découpe S^2 en deux disques échangés par f , qui peut ainsi être identifiée avec la symétrie de la sphère standard dans \mathbb{R}^3 par rapport à un plan.

Si f a un point fixe et ne renverse pas l'orientation de S^2 ,

la proposition 1.3 en dimension 2 montre que chaque point fixe est isolé et admet un disque voisinage stable par f sur lequel f s'identifie à une rotation. L'espace quotient S^2/f est donc une surface et l'application canonique de S^2 sur S^2/f est une application de revêtement ramifié. D'autre part, S^2/f est simplement connexe. En effet, si γ est un lacet dans S^2/f , on peut déformer γ en le faisant "tourner autour d'un point fixe" comme sur la figure 1 de façon qu'il admette un relèvement $\tilde{\gamma}$ dans S^2 ; ce relèvement



figure 1

étant contractible, il en est de même pour γ . Donc S^2/f est la sphère S^2 et un calcul sur la caractéristique d'Euler montre que f a exactement deux points fixes. Il est alors aisé de construire une identification de S^2 avec la sphère standard dans \mathbb{R}^3 pour laquelle f est une rotation autour d'un axe.

Ceci achève la démonstration du lemme 1.4, et donc de la proposition 1.3. \square

COROLLAIRE 1.5. Soit M une variété PL compacte orientée de dimension 3 et soit f une application périodique PL de M dans elle-même conservant son orientation. Alors l'ensemble des points fixes de f est une sous-variété compacte de M de dimension 1.

Démonstration : D'après la proposition 1.3, f s'identifie à une rotation au voisinage de chacun de ses points fixes; ce

qui montre que l'ensemble des points fixes de f est une sous-variété de dimension 1 de M . Comme ce voisinage est en fait l'étoile fermée du point fixe dans une certaine triangulation, on en déduit que cette sous-variété est compacte. \square

C. Lemmes de transversalité en présence d'une involution.

Désormais, nous ne prendrons plus la peine de préciser que nous travaillons dans la catégorie PL et M désignera une variété orientée compacte de dimension 3 munie d'une involution τ conservant son orientation.

LEMME 1.6. Soient K l'ensemble des points fixes de τ et F une surface stable par τ dans M . Alors, F coupe transversalement K si τ conserve son orientation ou contient chaque composante de K qu'elle rencontre si τ renverse son orientation.

Démonstration: Si τ renverse l'orientation de F , la proposition 1.3 montre que l'ensemble des points fixes de la restriction de τ à F est une sous-variété de dimension 1 de F , et est donc réunion disjointe de composantes de K .

Si τ conserve l'orientation de F , la proposition 1.1 fournit une triangulation T de M dont F et K sont des sous-complexes et pour laquelle τ est simpliciale. D'après la proposition 1.3, les points fixes de la restriction de τ à F sont isolés, et appartiennent donc au 0-squelette de T . Soient x l'un d'entre eux et U l'étoile fermée de x dans T . Si l'on a choisi la triangulation de départ suffisamment fine, $\partial U \cap F$ est une courbe qui sépare ∂U en deux disques D et D'

stables par τ . Puisque D est stable par τ , la ^{même} démonstration qu'au lemme 1.4 montre qu'il intersecte K en exactement un point situé dans son intérieur. De même pour D' . Comme $K \cap U$ et $F \cap U$ sont les cônes respectifs en x de $K \cap D$ et $F \cap D$, ceci montre que l'intersection de F et K est transverse en x . \square

PROPOSITION 1.7. Soient F et G deux surfaces dans M stables par τ . Si, en outre, τ ne renverse pas l'orientation de G , on peut déformer équivariamment G de sorte que l'intersection de F et G soit transverse.

Démonstration: Déformons d'abord G de sorte que l'intersection de F et G soit transverse au voisinage de l'ensemble K des points fixes de τ . Puisque τ ne renverse pas l'orientation de G , le lemme 1.6 affirme que l'intersection de G et de K est transverse. Si τ conserve aussi l'orientation de F , il en est de même de F et le fait que l'action de τ soit localement orthogonale permet de construire aisément une déformation équivariante de G après laquelle $F \cap G \cap K$ est vide. Si τ renverse l'orientation de F , la proposition 1.1 fournit une triangulation T dont F , G et K sont des sous-complexes et pour laquelle τ est simpliciale; par une déformation équivariante, on peut alors modifier G de sorte qu'aucun point de $G \cap K$ ne soit situé dans le 0-squelette de T , ce qui assure que l'intersection de F et G est transverse au voisinage de K .

Soient maintenant M^* le quotient de $\overline{M - U(K)}$ par τ et F^* et G^* les images dans M^* respectives de $\overline{F - U(K)}$ et $\overline{G - U(K)}$. On peut déformer G^* de sorte que son intersection

avec F^* soit transverse, et ceci par une déformation égale à l'identité sur l'image de $\partial U(K)$ dans M^* . En relevant cette déformation dans $\overline{M-U(K)}$ et en étendant ce relèvement à M tout entière par l'identité sur $U(K)$, on obtient une déformation équivariante de G qui rend son intersection avec F transverse, ce qui achève la démonstration. \square

Remarque. La condition imposant à τ de conserver l'orientation de G est nécessaire, comme en témoigne l'exemple suivant : Dans $S^1 \times D^2$, soit τ l'involution qui à (z, z') associe $(z, -z')$, où S^1 (resp. D^2) est identifié avec l'ensemble des nombres complexes de module égal à 1 (resp. inférieur ou égal à 1). Considérons F et G les deux anneaux respectivement paramétrés par les applications de $\mathbb{R} \times [-1, +1]$ dans $S^1 \times D^2$ ci-dessous :

$$(t, \rho) \mapsto (e^{2\pi i t}, \rho)$$

$$\text{et } (t, \rho) \mapsto (e^{2\pi i t}, \rho e^{2\pi i n t}) \text{ où } n \in \mathbb{Z}^*.$$

L'intersection de F et G contient l'ensemble $S^1 \times \{0\}$ de points fixes de τ et, pour tout $r \in]0, 1]$, si T_r est le tore $S^1 \times (\partial r D^2)$, le nombre d'intersection d'une composante de $F \cap T_r$ avec une composante de $G \cap T_r$ est égal à $\pm n$. Ceci montre que l'intersection de F et G n'est pas transverse. Or, les deux propriétés ci-dessus sont invariantes par déformation équivariante de G . On ne peut donc déformer équivariamment G de sorte que son intersection avec F soit transverse.

PROPOSITION 1.8. Si F est une surface dans M , on peut déformer F de sorte que l'intersection de F avec $\tau(F)$ soit transverse.

Démonstration : On reprend les mêmes notations qu'à la

proposition 1.7. Déformons d'abord F de sorte que son intersection avec K soit transverse. Au voisinage d'un point de $F \cap K$, $\bar{\tau}$ s'identifie à une transformation orthogonale; si l'on déforme F de sorte qu'il s'identifie sur ce voisinage à un plan ne contenant pas l'axe de la rotation, et non orthogonal à celui-ci, l'intersection de F et de $\bar{\tau}(F)$ est transverse au voisinage du point de $F \cap K$ considéré. On peut ainsi faire en sorte que l'intersection de F et $\bar{\tau}(F)$ soit transverse au voisinage de K .

Considérons maintenant l'application composée

$$\overline{F-U(K)} \xrightarrow{i} \overline{M-U(K)} \xrightarrow{p} M^*$$

A l'aide des théorèmes de transversalité classiques et en relevant une homotopie convenable de $f \circ i$, on peut trouver une application i' , arbitrairement proche de i et coïncidant avec i sur $\partial U(K)$, telle que $f \circ i'$ soit une immersion et n'admette que des points simples, doubles ou triples. Si i' est suffisamment proche de i , $i'(\overline{F-U(K)})$ est une surface plongée dans $\overline{M-U(K)}$ isotopie à $\overline{F-U(K)}$. Puisque p est un revêtement à deux feuilletés, $p \circ i'$ ne peut alors avoir de points triples, ce qui entraîne que $i'(\overline{F-U(K)})$ intersecte transversalement $\bar{\tau} \circ i'(\overline{F-U(K)})$. On obtient ainsi la déformation cherchée en remplaçant F par la surface $(F \cap U(K)) \cup i'(\overline{F-U(K)})$ qui lui est isotopie. \square

Désormais et sauf mention explicite du contraire, nous imposerons à toute intersection pouvant être rendue transverse par l'usage des propositions 1.7 et 1.8. d'être transverse.

D. Lemme de s-minimalité par déformation équivariante.

Soient F et G deux surfaces dans M . On dira que l'intersection de G avec F est s-minimale si aucune des deux conditions suivantes n'est réalisée:

a) il existe une boucle B dans M et deux disques D et D' tels que:

(i) $D \cap D' = \partial D = \partial D'$ et $D \cup D' = \partial B$.

(ii) $D \subset G$, $D' \cap F = \emptyset$ et $D \cap F \neq \emptyset$.

b) il existe une surface S , une sous-variété compacte s de ∂S et un plongement de $(S \times I)/N$ dans M , où N est la relation d'équivalence définie par

$(x, 0) \sim (x, 1) \iff x \in s$ et $x = x'$,

tel que, si P est l'image de ce plongement:

(i) $\overline{\partial S - s} \times I = P \cap \partial M$ et $s \neq \emptyset$.

(ii) $(S \times \{0\}) \subset G$ et $(\overset{\circ}{S} \times \{0\}) \cap F = \emptyset$.

(iii) $(S \times \{1\}) \subset F$.

(Si A est une partie de $S \times I$, on notera encore A son image par l'application composée

$S \times I \longrightarrow (S \times I)/N \longrightarrow M$).

Nous utiliserons fréquemment cette notion technique, en raison notamment du résultat suivant.

LEMME 1.10. Soient F et G deux surfaces dans M telles que l'intersection de G avec F soit s-minimale. Soient $\tilde{M} = \overline{M - U(F)}$ et $\tilde{G} = G \cap \tilde{M}$. Si G est incompressible dans M , alors \tilde{G} est incompressible dans \tilde{M} .

Démonstration: Supposons \tilde{G} compressible dans \tilde{M} . Il existe alors un disque D' dans \tilde{M} tel que $D' \cap \tilde{G} = \partial D'$ et tel que $\partial D'$ ne borde aucun disque de \tilde{M} . La surface G étant incompressible,

D. Lemme de s-minimalité par déformation équivariante.

Soient F et G deux surfaces dans M . On dira que l'intersection de G avec F est s-minimale si aucune des deux conditions suivantes n'est réalisée :

a) il existe une boule B dans M et deux disques D et D' tels que :

$$(i) D \cap D' = \partial D = \partial D' \quad \text{et} \quad D \cup D' = \partial B.$$

$$(ii) D \subset G, \quad D' \cap F = \emptyset \quad \text{et} \quad D \cap F \neq \emptyset.$$

b) il existe une surface S , une sous-variété compacte \mathcal{S} de ∂S et un plongement de $(S \times I)/N$ dans M , où N est la relation d'équivalence définie par

$$(x, 0) \sim (x, 1) \iff x \in \mathcal{S} \quad \text{et} \quad x = x',$$

tel que, si P est l'image de ce plongement :

$$(i) \overline{\mathcal{S} \times I} = P \cap \partial M \quad \text{et} \quad \mathcal{S} \neq \emptyset.$$

$$(ii) (S \times \{0\}) \subset G \quad \text{et} \quad (\mathcal{S} \times \{0\}) \cap F = \emptyset.$$

$$(iii) (S \times \{1\}) \subset F.$$

(Si A est une partie de $S \times I$, on notera encore A son image par l'application composée

$$S \times I \longrightarrow (S \times I)/N \longrightarrow M).$$

Nous utiliserons fréquemment cette notion technique, en raison notamment du résultat suivant.

LEMME 1.10. Soient F et G deux surfaces dans M telles que l'intersection de G avec F soit s-minimale. Soient $\tilde{M} = \overline{M - U(F)}$ et $\tilde{G} = G \cap \tilde{M}$. Si G est incompressible dans M , alors \tilde{G} est incompressible dans \tilde{M} .

Démonstration : Supposons \tilde{G} compressible dans \tilde{M} . Il existe alors un disque D' dans \tilde{M} tel que $D' \cap \tilde{G} = \partial D'$ et tel que $\partial D'$ ne borde aucun disque dans \tilde{G} . La surface G étant incompressible,

$\partial D'$ borde un disque D dans G . La sphère $D \cup D'$ borde une boule B dans M parce que M est irréductible. Le disque D rencontre nécessairement F puisque $\partial D' = \partial D$ ne borde aucun disque dans G . La boule B et les deux disques D et D' satisfont donc à la condition a), ce qui contredit la s-minimalité de l'intersection de G avec F . \square

Si F et G sont deux surfaces dans M , on peut facilement déformer G de sorte que son intersection avec F soit s-minimale. En effet, parmi toutes les déformations de G après lesquelles l'intersection de G et F est transverse, choisissons-en une pour laquelle le nombre de composantes de $F \cap G$ soit minimum. L'intersection de G avec F est alors s-minimale car on pourrait sinon construire une déformation de G diminuant le nombre de composantes de $F \cap G$.

La proposition 1.11 concerne le même problème, dans le cas où l'on impose à F et G de rester stables par ζ .

PROPOSITION 1.11. Soient F et G deux surfaces essentielles dans M , stables par ζ . On suppose que G est une surface équivariante et que :

- (i) Aucune composante de G n'est un disque parallèle vers le bord ni une sphère.
- (ii) Les composantes de F sont des disques, des anneaux ou des tores.

On peut alors déformer G équivariamment de sorte que l'intersection de G avec F et celle de F avec ∂M soient s-minimales.

Remarques.

1) La condition (ii) n'est pas nécessaire à l'obtention du résultat, mais permet de raccourcir sensiblement la démonstration. Toutes les fois où nous aurons besoin de la proposition 1.11,

F sera formé de disques, d'anneaux ou de tores.

2) Par contre, l'essentialité de F et G est nécessaire, comme le montre l'exemple suivant. Soit $M = S^3$ identifiée avec le compactifié d'Alexandrov de \mathbb{R}^3 , et munie de la rotation τ d'angle π autour de l'axe Ox . Prenons pour F le plan xOy et pour G le tore standard de révolution autour de l'axe Oz . On vérifie que si G' est isotopé à G , son intersection avec F est s -minimale si et seulement si $F \cap G' = \emptyset$. Or, si l'on passe de G à G' par une déformation équivariante, G' contient comme G quatre points fixes de τ , lesquels se trouvent dans F , ce qui entraîne que $F \cap G' \neq \emptyset$. On a un résultat identique si l'on échange les rôles de F et G .

Démonstration de la proposition 1.11: Déformons équivariamment G de sorte que le nombre de composantes de $F \cap G$ soit minimum (pour toutes les déformations équivariantes après lesquelles l'intersection de F et G est transverse). On veut montrer que si l'intersection de F avec G ou celle de G avec F n'étaient pas s -minimale, il existerait une déformation équivariante de G diminuant le nombre de composantes de $F \cap G$. Remarquons qu'il suffit de le montrer si l'intersection de G avec F n'est pas s -minimale. En effet, si ceci est vrai et si l'intersection de F avec G n'est pas s -minimale on obtient en échangeant les rôles de F et G une déformation équivariante φ telle que $\varphi(F) \cap G$ a moins de composantes que $F \cap G$; ce qui entraîne que $F \cap \varphi^{-1}(G)$ a moins de composantes que $F \cap G$.

Supposons donc que l'intersection de G avec F ne soit pas s -minimale. Dans un premier temps, montrons que les conditions imposées à F et G permettent de ramener le cas a) de

la définition de la s -minimalité au cas b). En effet, soient une boule B dans M et deux disques D et D' tels que

$$D \cup D' = \partial B \quad \text{et} \quad \partial D = \partial D' = D \cap D'$$

$$D \subset G, \quad D' \cap F = \emptyset \quad \text{et} \quad D \cap F \neq \emptyset.$$

Soit D_1 un disque dans D tel que ∂D_1 soit une composante de $D \cap F$ et que $D_1 \cap F = \emptyset$. La surface F étant incompressible, ∂D_1 borde dans F un disque D_2 . La sphère $D_1 \cup D_2$ borde une boule B' puisque M est irréductible. En prenant alors $P = B'$, $S \times \{0\} = D_1$ et $S = \partial S$, on est ainsi ramené au cas b).

Plaçons nous donc maintenant dans le cas b). On supposera désormais S connexe. Montrons que l'on peut choisir P de sorte que $\overset{\circ}{P}$ soit une composante de $\overset{\circ}{M} - (F \cup G)$ et que S soit plongeable dans le plan.

Si une composante de $F \cap G$ borde un disque dans F , elle borde aussi un disque dans G puisque celle-ci est incompressible et le même raisonnement que ci-dessus permet de se ramener au cas où S est un disque. Si aucune composante de $F \cap G$ ne borde de disque dans F , l'hypothèse (ii) du lemme assure que S est un disque ou un anneau. On peut donc supposer que S est un disque ou un anneau, et qu'en outre, si S est un anneau, $\overline{G \cap \overset{\circ}{P}}$ est incompressible dans P (en effet, si $G \cap P$ est compressible dans P , le raisonnement du lemme 1.10 montre que F et G satisfont à la condition a) de la définition de la s -minimalité, laquelle se ramène à la condition b) avec un disque pour S , comme nous venons de le voir).

Si S est un anneau et si $\overline{G \cap \overset{\circ}{P}}$ est incompressible dans P , alors $\overline{G \cap \overset{\circ}{P}}$ est une réunion d'anneaux disjoints parallèles vers le bord dans P (cf lemme (2.3) de [Wa 1]). En prenant pour $S \times \{0\}$ une composante "minimale" de $\overline{G \cap \overset{\circ}{P}}$, on peut ainsi se ramener au cas où S est un anneau et où $G \cap \overset{\circ}{P} = \emptyset$.

Si S est un disque, les composantes de $\overline{G \cap \overset{\circ}{P}}$ sont toutes plongeables dans le plan, puisque G est incompressible, et

parallèles vers le bord. En prenant pour $S \times \{0\}$ une de ces composantes "minimales", on peut encore se ramener au cas où S est plongé dans le plan et où $G \cap \overset{\circ}{P} = \emptyset$, cette dernière condition entraînant que $\overset{\circ}{P}$ est une composante de $\overset{\circ}{M} - (F \cup G)$ puisque $F \cap \overset{\circ}{P} = \emptyset$ et $\partial P \subset (F \cup G \cup \partial M)$.

Les surfaces F et G étant stables par l'involution τ , celle-ci échange entre elles les composantes de $\overset{\circ}{M} - (F \cup G)$. En particulier, puisque $\overset{\circ}{P}$ est l'une de ces composantes, $\tau(\overset{\circ}{P}) = \overset{\circ}{P}$ ou bien $\tau(\overset{\circ}{P}) \cap \overset{\circ}{P} = \emptyset$. De même, $\overset{\circ}{S} \times \{0\}$ et $\overset{\circ}{S} \times \{1\}$ étant des composantes connexes de $(\overset{\circ}{F} \cup \overset{\circ}{G}) - (F \cap G)$, ^{ou bien} $\tau(S \times \{0\}) = S \times \{0\}$, ou bien $\tau(S \times \{0\}) \cap (S \times \{0\}) = \emptyset$, et on a la propriété analogue pour $S \times \{1\}$. Remarquons que, G étant une surface équivariante, la condition $\tau(S \times \{0\}) = S \times \{0\}$ entraîne que $\tau(P) = P$.

On veut maintenant montrer que, ou bien $\tau(P) = P$, ou bien $\tau(P) \cap P = \emptyset$. La remarque ci-dessus assure qu'il suffit de prouver que si $\tau(S \times \{0\}) \cap (S \times \{0\}) = \emptyset$, alors $\tau(P) \cap P = \emptyset$. Dans une première étape, établissons que sous cette hypothèse, $(\tau(P) \cap P) \subset (\Delta \times I)$, ce qui revient à dire que τ ne peut laisser $S \times \{1\}$ stable en renversant son orientation. En effet, si tel est le cas, $G' = (S \times \{0\}) \cup \tau(S \times \{0\})$ est une composante de G (figure 2; les parties hachurées représentent $(S-1) \times I$ et son

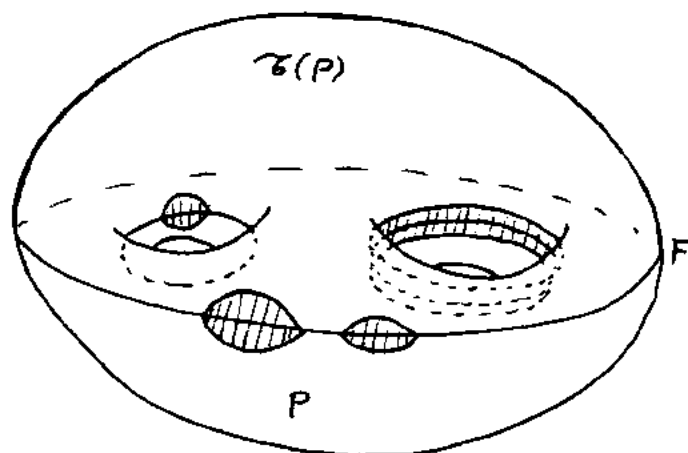


figure 2

image par $\bar{\tau}$). Si S n'est pas un disque ou si S est un disque et s a au moins deux composantes, on peut construire un disque D dans $P \cup \bar{\tau}(P)$ tel que $\overline{\partial D - \partial M}$ soit, ou bien une courbe fermée ne bordant pas de disque dans G' , ou bien un chemin non parallèle vers le bord dans G' (ceci est rendu possible par le fait que $S \neq \emptyset$), ce qui contredit l'essentialité de G . Si S est un disque et si s est connexe, alors G' est un disque parallèle vers le bord ou une sphère, ce qui est exclu par l'hypothèse (i).

Enfin, si $(\bar{\tau}(P) \cap P) \subset (S \times I)$, alors $\bar{\tau}(P) \cap P = \emptyset$. En effet, si $\bar{\tau}(P) \cap P$ est non vide et inclus dans $S \times I$, alors $\bar{\tau}$ renverse nécessairement l'orientation d'une composante de

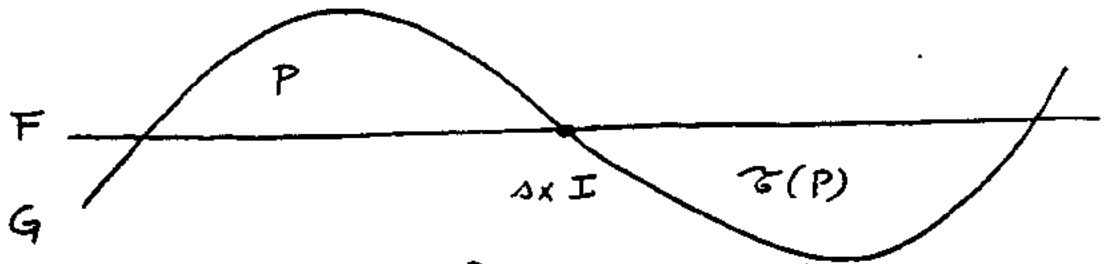


figure 3

G (voir figure 3), ce qui est exclu.

On a ainsi achevé la démonstration du fait que $\bar{\tau}(P) = P$ ou $\bar{\tau}(P) \cap P = \emptyset$.

Si $\bar{\tau}(P) \cap P = \emptyset$, on peut d'ores et déjà construire une déformation équivariante de G qui diminue le nombre de composantes de $F \cap G$: Par une déformation Ψ de support $U(P)$, on peut amener $S \times \{0\}$ sur $S \times \{1\}$ en "aplatissant" P , puis légèrement "décoller" $\Psi(S \times \{0\})$ de F de sorte que $\Psi(S \times \{0\}) \cap F = \emptyset$. Cette modification a pour effet de supprimer les anciennes composantes de $F \cap G$ correspondant à $S \times I$ et $G \cap (S \times \{1\})$. La déformation $\bar{\tau} \circ \Psi \circ \bar{\tau}$ ayant un support disjoint de celui de Ψ , elle commute

avec elle et on vérifie aisément que leur composée $\tau \circ \varphi \circ \tau \circ \varphi$ est une déformation équivariante diminuant le nombre de composantes de FN_G .

Si $\tau(P) = P$, on procède de même, à ceci près que l'on peut directement choisir φ équivariante grâce au lemme suivant

LEMME 1.12. Si $P = \tau(P)$, on peut choisir le plongement

$$S \times I / \nu \longrightarrow P$$

de sorte que l'involution τ vérifie

$$\forall x \in S, \forall \theta \in I, \tau(x, \theta) = (\tau(x), \theta) \quad (*)$$

où on identifie S avec $S \times \{0\}$ et chaque point de $S \times I$ avec son image dans P .

Démonstration: Il sera commode de ne plus forcément supposer S connexe. La restriction de τ à S conserve son orientation et n'a donc que des points fixes isolés. Il existe par conséquent dans S/τ un système de chemins disjoints qui évitent l'image des points fixes de la restriction de τ à S et découpent S/τ en une réunion de disques dont chacun contient au plus un point image d'un point de S fixe par τ . Ces chemins se relèvent en un système de chemins stable par τ qui découpe S en une réunion de disques. On raisonne par récurrence sur le nombre de chemins de ce système, pour montrer que, si σ est une sous-variété compacte de $\overline{DS-S}$ sur laquelle (*) est vérifiée pour tout $x \in \sigma$, on peut multiplier le paramétrage de P par $S \times I / \nu$ de sorte que (*) soit vérifiée pour tout $x \in S$ et ce sans changer le paramétrage sur σ .

Si S est un disque, P est une boule et le théorème de F. Waldhausen ([Wa 3]) sur les involutions affirme que τ s'identifie sur P à la rotation standard dans la boule standard. Le quotient P/τ est donc une boule dans laquelle l'image de l'ensemble des points fixes de τ est un segment non noué. La propriété s'étend alors

aisément en relevant dans P un paramétrage convenable de P/τ par $((S \times \tau) \times I)/\approx$, où \approx est définie par :

$$(x, \theta) \approx (x, \theta') \iff x \in S/\tau \text{ et } x = x'.$$

Comme la propriété est immédiate si S est la réunion de deux disques disjoints échangés par τ , on en déduit que la propriété de récurrence est vraie si S est une réunion de disques disjoints, ce qui permet d'amorcer la récurrence.

Sans le cas général, soit k l'un des chemins de S choisis précédemment, et soit D le disque $k \times I$ dans P .

Remarquons que $k \cap \tau(k) = \emptyset$. D'après la proposition 1.9, on peut déformer légèrement D , ce qui revient à modifier le paramétrage de P , de sorte que son intersection avec $\tau(D)$ soit transverse. Parmi tous les paramétrages de P par $S \times I/\nu$ pour lesquels l'intersection de D et $\tau(D)$ est transverse, on en choisit un tel que le nombre de composantes de $D \cap \tau(D)$ soit minimum. On veut montrer qu'alors $D \cap \tau(D) = \emptyset$.

Soit k' une composante de $D \cap \tau(D)$ qui est une courbe fermée. Elle borde dans $\tau(D)$ un disque D' . Pour un bon choix de k' , on peut supposer que D' ne recoupe pas D . D'autre part, k' borde un disque D'' dans D , et la sphère $D' \cup D''$ borde une boule B dans P . Remarquons tout de suite que $\tau(D') = D''$ ou bien $D' \cap \tau(D') = \emptyset$: En effet, si $\tau(\partial D') \neq \partial D'$, $D' \cap \tau(D') = \emptyset$ puisque $D' \cap D = \emptyset$; et si on avait $\tau(\partial D') = \partial D'$ et $\tau(D') \neq D''$, alors $D'' \cup \tau(D')$ serait une sphère composante de D ce qui est exclu. Déformons maintenant D par un aplatissement de B , ce qui revient à modifier le paramétrage de P par $S \times I/\nu$, de façon à amener D'' sur D' . Si $D' \cap \tau(D') = \emptyset$, on décolle alors

légèrement D de D' , ce qui a pour effet de supprimer de $D \cap \bar{\tau}(D)$ la composante correspondant à k' (figure 4) sans en rajouter de supplémentaires (et en en éliminant au

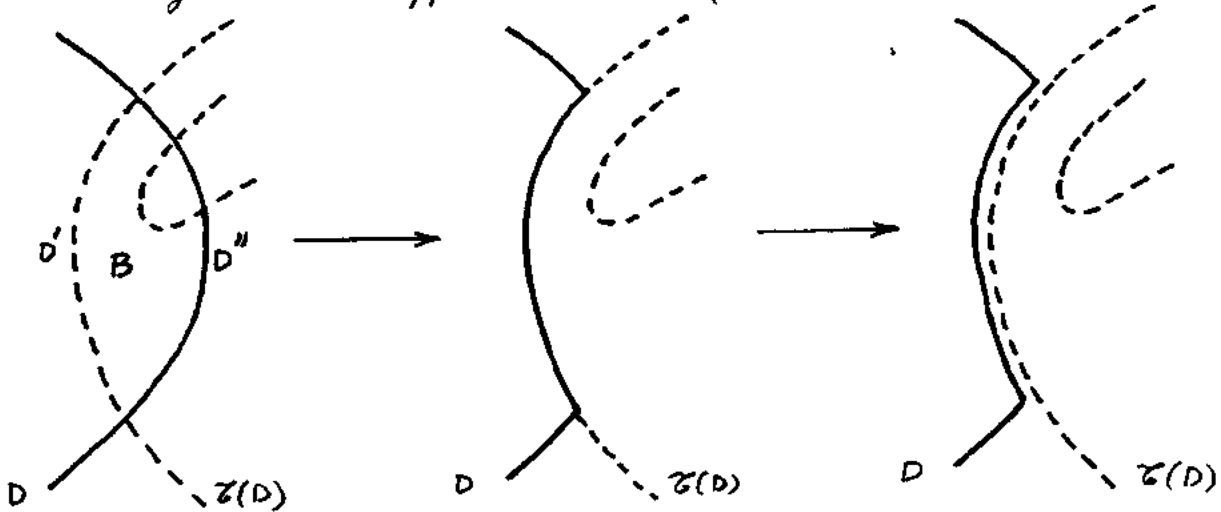


figure 4

contraire d'autres telles $\bar{\tau}(k')$ et les composantes de $\bar{D}'' \cap \bar{\tau}(D)$ et $\bar{\tau}(\bar{D}'') \cap D$. Si $\bar{\tau}(D') = D''$, les deux disques D et $\bar{\tau}(D)$ sont, après la première modification, "accolés" le long de $\partial D'$ et il est aisé de construire une modification de D faisant disparaître de $D \cap \bar{\tau}(D)$ la composante correspondant à k' (figure 5). Sans les deux cas, on a ainsi réussi à

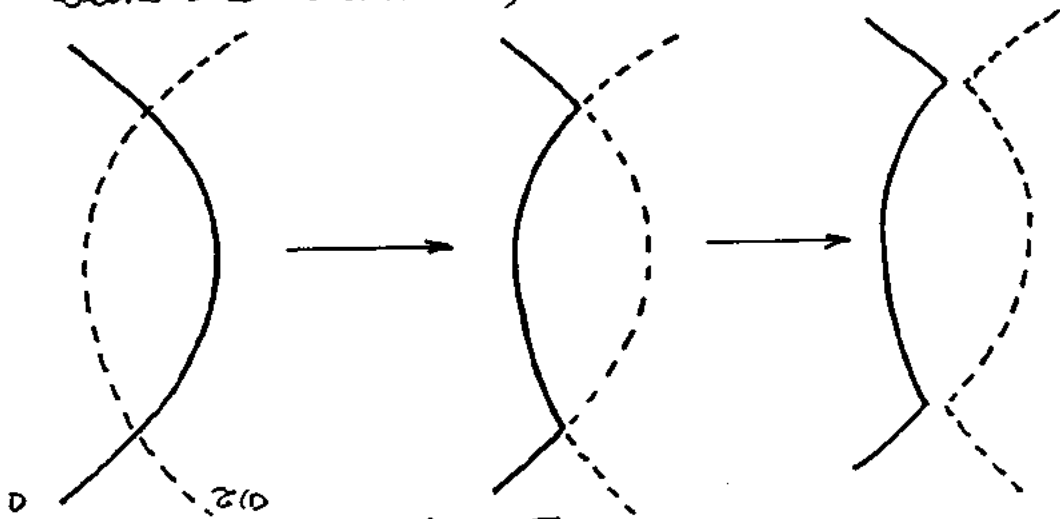


figure 5

diminuer le nombre de composantes, de $D \cap \mathcal{C}(D)$, ce qui contredit l'hypothèse faite. L'intersection de D et de $\mathcal{C}(D)$ ne contient donc aucune courbe fermée.

Soit maintenant k' une composante de $D \cap \mathcal{C}(D)$ qui est un chemin. Il est parallèle vers le bord dans $\mathcal{C}(D)$ par un disque D' et parallèle vers le bord dans D par un disque D'' tels que $\partial D' \cap (S \times \{0\})$ et $\partial D'' \cap (S \times \{0\})$ soient vides (ceci est possible car $k' \cap \mathcal{C}(k) = \emptyset$). D'autre part, on peut choisir k' de sorte que $\partial D' \cap \mathcal{C}(D) = \emptyset$. Alors $D' \cup D''$ est un disque et $\partial(D' \cup D'')$ borde un disque D''' dans $\partial P - (S \times \{0\})$ puisque l'application

$$H_1(\partial P - (S \times \{0\})) \longrightarrow H_1(P)$$

est un isomorphisme. La sphère $D' \cup D'' \cup D'''$ borde une boule B que l'on peut utiliser comme précédemment pour diminuer le nombre de composantes de $D \cap \mathcal{C}(D)$ par une modification du paramétrage de P , ce qui contredit l'hypothèse faite. On a ainsi montré que $D \cap \mathcal{C}(D) = \emptyset$.

Sous ces conditions, le lemme 3.4 de [Wa 2] permet de modifier le paramétrage de P de sorte que $\mathcal{C}(D) = \mathcal{C}(k) \times I$ (et toujours $D = k \times I$). Par une déformation du paramétrage de P au voisinage de $\mathcal{C}(D)$, on peut faire en sorte que :

$$\forall x \in k \cup \mathcal{C}(k), \forall \theta \in I, \mathcal{C}(x, \theta) = (\mathcal{C}(x), \theta).$$

Soient alors $S' = \overline{S - U(k \cup \mathcal{C}(k))}$ et σ la sous-variété de $\partial S' - S$ égale à $(\sigma \cap S') \cup \partial U_{\frac{1}{2}}(k \cup \mathcal{C}(k))$. Par hypothèse de récurrence, on peut déformer le paramétrage de $\overline{P - U(D \cup \mathcal{C}(D))}$ par $S' \times I / \nu$, sans changer celui de $\sigma \times I$, de sorte que la propriété (*) soit vérifiée. En recollant $\overline{P - U(D \cup \mathcal{C}(D))}$ le long

de $D \cup \mathbb{C}(D)$ et S^1 le long de $\partial U_5 (k \cup \mathbb{C}(k))$, on obtient pour P la propriété annoncée, ce qui achève la démonstration du lemme 1.12 et donc de la proposition 1.11. \square

E. Involutions sur les S^1 -fibres et les I -fibres de dimension 2.

On identifiera I avec l'intervalle $[-1, +1]$ et S^1 (resp. D^2) avec l'ensemble des nombres complexes de module égal (resp. inférieur ou égal) à 1. Le point de départ de l'étude des involutions sur les I -fibres et S^1 -fibres de dimension 2 sera le résultat classique suivant (voir ^{aussi} la démonstration du lemme 1.4).

LEMME 1.13. A un changement de paramétrage près, les seules involutions sur le disque D^2 sont celles qui à z associent respectivement $-z$ et \bar{z} .

En relevant un paramétrage convenable du quotient de $I \times I$ par une involution donnée, on déduit du lemme 1.13 le

LEMME 1.14. A un changement de paramétrage près, les seules involutions sur $I \times I$ conservant la structure de variété à coins sont celles qui à (t, u) associent respectivement $(-t, -u)$, $(-t, u)$ et (u, t) .

LEMME 1.15. Sur S^1 (resp. I) muni d'une involution τ qui à z (resp. t) associe $-z$ ou \bar{z} (resp. $-t$), soit φ un automorphisme vérifiant l'une des conditions suivantes:

- (i) $\varphi \circ \tau = \tau \circ \varphi$
- (ii) $\varphi \circ \tau = \tau \circ \varphi^{-1}$

Si φ vérifie la condition (i), il existe une isotopie équivariante

$u \mapsto \varphi_u$ telle que $\varphi_0 = \varphi$ et φ_1 associe $z, -z, \bar{z}$ ou $-\bar{z}$ (resp. t ou $-t$) à z (resp. t).

Si φ vérifie la condition (ii), il existe une isotopie $u \mapsto \varphi_u$ telle que φ_0 soit l'identité et que $\tau \circ \varphi_1 \circ \tau \circ \varphi \circ \varphi_1^{-1}$ associe $z, -z, \bar{z}$ ou $-\bar{z}$ (resp. t ou $-t$) à z (resp. t).

Démonstration: Si φ vérifie (i) et si τ n'a pas de points fixes (ce qui revient à dire que τ est l'application de S^1 qui à z associe $-z$), l'espace quotient S^1/τ s'identifie à S^1 . Choisissons un paramétrage de S^1/τ de façon que la projection de S^1 sur S^1/τ soit représentée par l'application $z \mapsto z^2$. L'automorphisme φ induit un automorphisme de S^1/τ qui est isotope à l'application qui à z associe z ou \bar{z} . Un relèvement dans S^1 de cette isotopie de S^1/τ fournit l'isotopie cherchée.

Si φ vérifie (i) et si τ possède des points fixes, il existe un chemin k tel que l'ensemble des points fixes de τ sépare S^1 (resp. I) en $k \cup \tau(k)$. Puisque φ commute avec τ , φ envoie k sur lui-même ou sur $\tau(k)$. En linéarisant, on peut déformer la restriction de φ à k , par une isotopie ne changeant pas φ sur ∂k , de sorte que pour tout $z \in k$, $\varphi(z) = z, -z, \bar{z}$ ou $-\bar{z}$ (resp. pour tout $t \in k$, $\varphi(t) = t$ ou $-t$). En étendant cette isotopie à S^1 (resp. I) tout entier à l'aide de τ , on obtient une déformation équivariante de φ satisfaisant aux conditions requises.

Si φ vérifie (ii), alors $\tau \circ \varphi$ est une involution. Il existe donc une involution standard τ' qui à z (resp. t) associe $z, -z$ ou \bar{z} (resp. t ou $-t$) et un automorphisme ψ tel que

$$\tau \circ \varphi = \psi^{-1} \circ \tau' \circ \psi.$$

Quitte à le composer avec une application convenable commutant avec τ , on peut supposer ψ isotope à l'identité, et le résultat s'ensuit, puisque $\tau \circ \tau'$ est du type cherché. \square

LEMME 1.16. Soit F une surface admettant une structure p de I -fibré (resp. S^1 -fibré) de base I . Si τ est une involution de F , il existe sur F un fibré p' de base I et une trivialisat. de p' pour lesquels τ s'exprime comme produit d'une involution de la base et d'une involution de la fibre. En outre, si τ est fibrée pour p , on peut faire en sorte que $p = p'$.

LEMME 1.17. Soit F une surface admettant une structure p de I -fibré (resp. S^1 -fibré) de base S^1 . Si τ est une involution sur F , il existe un automorphisme φ de la fibre et un isomorphisme de F avec $\mathbb{R} \times I / \mathcal{N}$ ou $\mathbb{R} \times S^1 / \mathcal{N}$, où \mathcal{N} est la relation d'équivalence qui identifie (u, x) et $(u+1, \varphi(x))$, pour lequel τ est l'image du produit d'un automorphisme α de \mathbb{R} et d'une involution β de la fibre. On peut imposer que β associe à $t \in I$ (resp. $t_2 \in S^1$) t ou $-t$ (resp. $t_2, -t_2$ ou \bar{t}_2), que φ associe à $t \in I$ (resp. $t_2 \in S^1$) t ou $-t$ (resp. $t_2, -t_2, \bar{t}_2$ ou $-\bar{t}_2$) et que l'une des trois conditions suivantes soit réalisée :

- (i) pour tout $u \in \mathbb{R}$, $\alpha(u) = u$.
- (ii) pour tout $u \in \mathbb{R}$, $\alpha(u) = 1-u$.
- (iii) pour tout $u \in \mathbb{R}$, $\alpha(u) = u + \frac{1}{2}$ et φ est l'identité.

En outre, si τ est fibrée pour p , on peut imposer que p coïncide avec la fibration canonique de $\mathbb{R} \times I / \mathcal{N}$ ou $\mathbb{R} \times S^1 / \mathcal{N}$.

Démonstration des lemmes 1.16 et 1.17: Si $F = I \times I$, l'existence de la fibration p' est assurée par le lemme 1.14. Si τ est fibrée pour p , on vérifie aisément que p induit une structure de I -fibré \bar{p} dans F/τ . Le relèvement d'une trivialisat. de \bar{p} permet de conclure.

Si F est un S^1 -fibré de base I , soit k un chemin essentiel joignant les deux composantes de ∂F . On peut alors montrer que l'on peut déformer k de sorte que $\tau(k) = k$ ou $\tau(k) \cap k = \emptyset$; la

démonstration de ce résultat étant une version simplifiée de celle que nous donnerons au paragraphe suivant pour les variétés de dimension 3, celle-ci est laissée au soin du lecteur. On obtient le résultat cherché en appliquant le lemme 1.14 aux composantes stables par $\bar{\tau}$ de la variété obtenue en découpant F le long de $k \cup \bar{\tau}(k)$, et en utilisant le lemme 1.15 pour que les applications de recollement soient linéaires (pour les détails, voir la démonstration du lemme 1.17 ci-dessous). Si $\bar{\tau}$ est fibrée pour p , elle induit dans la base I une involution $\bar{\tau}$ que l'on peut supposer égale à l'identité ou à l'application qui à t associe $-t$. Si pour tout t , $\bar{\tau}(t) = -t$, l'extension à F par $\bar{\tau}$ d'un paramétrage convenable de $p^{-1}([0, 1])$ fournit une trivialisatoin de p pour laquelle $\bar{\tau}$ est le produit de $\bar{\tau}$ et de la restriction de $\bar{\tau}$ à $p^{-1}(0)$. Si $\bar{\tau}$ est l'identité, p induit une application \bar{p} de $F/\bar{\tau}$ dans I que l'on vérifie aisément être une application de I -fibré ou de S^1 -fibré, selon que $\bar{\tau}$ renverse ou non l'orientation des fibres; le relèvement d'une trivialisatoin de \bar{p} permet alors de construire une trivialisatoin de p du type cherché.

Si F est un fibré sur S^1 , l'étude des involutions sur $H_1(F)$ si F est fermée et des chemins essentiels si ∂F est non vide permet de choisir p de sorte que l'une fibre k soit isotope à son image par $\bar{\tau}$. On peut alors déformer k de sorte que $\bar{\tau}(k) = k$ ou $\bar{\tau}(k) \cap k$ soit vide (ceci est toujours réalisé si $\bar{\tau}$ est fibrée pour p , et revient sinon à modifier p). La surface obtenue en découpant F le long de k est un fibré de base I , et l'étude des courbes essentielles dans ce fibré montre que $\bar{\tau}(k)$ est isotope à une fibre. On peut donc modifier p de sorte que $k \cup \bar{\tau}(k)$ soit verticale (si $\bar{\tau}$ est fibrée pour p , la relation est réalisée d'emblée). La surface F est donc découpée par $k \cup \bar{\tau}(k)$ en un ou deux fibres

de base I .

Si $k = \mathbb{C}(k)$, il existe un automorphisme φ de la fibre et un isomorphisme entre F et $I \times I / \approx$ ou $I \times S^1 / \approx$, où la relation d'équivalence \approx identifie $(-1, x)$ et $(+1, \varphi(x))$, pour lequel k correspond à $\{+1\} \times I$ ou $\{+1\} \times S^1$. L'involution τ se relève en une involution de $I \times I$ ou $I \times S^1$ et l'application du lemme 1.16 permet de construire, en changeant éventuellement φ , un isomorphisme entre F et $\mathbb{R} \times I / \nu$ ou $\mathbb{R} \times S^1 / \nu$ pour lequel τ s'identifie à l'image du produit d'une involution standard β de la fibre et d'un automorphisme α de \mathbb{R} qui à u associe u ou $1-u$. Le fait que le produit (α, β) soit compatible avec ν s'exprime par la condition $\varphi \circ \beta = \beta \circ \varphi$ dans le premier cas et $\varphi \circ \beta = \beta \circ \varphi^{-1}$ dans le deuxième.

Si $\alpha(u) = u$ pour tout u , et donc $\varphi \circ \beta = \beta \circ \varphi$, le lemme 1.15 fournit une isotopie $t \mapsto \varphi_t$ entre $\varphi = \varphi_0$ et un automorphisme "triviale" φ_1 telle que $\varphi_t \circ \beta = \beta \circ \varphi_t$ pour tout t . Soit ν_1 la relation d'équivalence définie par φ_1 sur $\mathbb{R} \times I$ ou $\mathbb{R} \times S^1$.

L'application

$$(u, x) \mapsto (u, \varphi_u \circ \varphi^{-1}(x)),$$

définie pour $u \in [0, 1]$ induit un isomorphisme de $\mathbb{R} \times I / \nu$ sur $\mathbb{R} \times I / \nu_1$ ou de $\mathbb{R} \times S^1 / \nu$ sur $\mathbb{R} \times S^1 / \nu_1$ pour lequel l'image de (α, β) est toujours représentée par (α, β) . On peut donc remplacer φ par φ_1 , ce qui achève la démonstration dans ce cas. Réciproquement, la condition $\varphi \circ \beta = \beta \circ \varphi$ étant naturellement réalisée quand φ et β satisfont aux hypothèses du lemme, la donnée de α, β et φ définit une involution sur la surface F .

Si $\alpha(u) = 1-u$ et $\varphi \circ \beta = \beta \circ \varphi^{-1}$, le lemme 1.15 fournit une isotopie $t \mapsto \varphi_t$ et telle que φ_0 soit l'identité et

que l'application $\beta \circ \Psi_1 \circ \beta \circ \Psi_1^{-1}$ soit "linéaire". L'automorphisme de $[0, 1] \times I$ ou $[0, 1] \times S^1$ défini par

$$(u, x) \longmapsto (u, \Psi_{2u}(x)) \text{ si } 0 \leq u \leq \frac{1}{2}$$

$$(u, x) \longmapsto (u, \beta \circ \Psi_{2-2u} \circ \beta(x)) \text{ si } \frac{1}{2} \leq u \leq 1,$$

induit un isomorphisme de $\mathbb{R} \times I / \mathcal{N}$ sur $\mathbb{R} \times I / \mathcal{N}_1$, ou de $\mathbb{R} \times S^1 / \mathcal{N}$ sur $\mathbb{R} \times I / \mathcal{N}_1$, où \mathcal{N}_1 est la relation

d'équivalence associée à $\beta \circ \Psi_1 \circ \beta \circ \Psi_1^{-1}$. Comme cet

isomorphisme est choisi de sorte que $\bar{\tau}$ soit toujours l'image de (α, β) dans ce nouveau paramétrage, on peut se ramener au cas où Ψ est du type annoncé. Remarquons que là aussi, la condition $\Psi \circ \beta = \beta \circ \Psi^{-1}$ est toujours réalisée dès que β et Ψ sont "linéaires".

Si $k \cup \bar{\tau}(k)$ sépare F en deux composantes stables par $\bar{\tau}$, l'application du lemme 1.16 à l'une de ces composantes montre que, si $\bar{\tau}$ est fibrée pour p , il existe une fibre k' telle que $k' = \bar{\tau}(k')$ et que si $\bar{\tau}$ n'est pas fibrée, on peut choisir p de sorte qu'il existe encore une telle fibre k' . On est ainsi ramené au cas précédent.

Si $k \cup \bar{\tau}(k)$ sépare F en deux composantes échangées par $\bar{\tau}$, on obtient en étendant un paramétrage d'une de ces composantes un isomorphisme de F avec $\mathbb{R} \times I / \mathcal{N}$ ou $\mathbb{R} \times S^1 / \mathcal{N}$ pour lequel la restriction de $\bar{\tau}$ à $[0, \frac{1}{2}] \times I$ ou $[0, \frac{1}{2}] \times S^1$ s'écrit sous la forme $\bar{\tau}(u, x) = (u + \frac{1}{2}, \beta(x))$, où β est un certain automorphisme de la fibre. Puisque $\bar{\tau}$ est involutive, l'application de cette formule quand $u=0$ entraîne que $\beta^2 = \Psi$. L'automorphisme Ψ conserve donc l'orientation de la fibre et est par conséquent isotopé à l'identité. Une modification du paramétrage au voisi-

map de k permet alors de faire en sorte que φ soit égal à l'identité.
 L'application p est ainsi une involution, que l'on peut rendre standard par un changement de l'isomorphisme entre F et $\mathbb{R} \times I/\nu$ ou $\mathbb{R} \times S^1/\nu$. On est ainsi dans le cas (iii).

En remarquant que, si $\tilde{\tau}$ est fibré pour p , ces dernières modifications peuvent être faites de sorte que p coïncide avec la fibration canonique de $\mathbb{R} \times I/\nu$ ou $\mathbb{R} \times S^1/\nu$, nous avons ainsi achevé la démonstration du lemme 1.17. \square

COROLLAIRE 1.18. A un changement de paramétrage près, les seules involutions sur l'anneau $S^1 \times I$ sont celles qui, à (z, t) associent respectivement $(z, -t)$, $(-z, t)$, $(-z, -t)$, (\bar{z}, t) et $(\bar{z}, -t)$.

A un changement de paramétrage près, les seules involutions sur le tore $S^1 \times S^1$ sont celles qui, à (z, z') associent respectivement $(z, -z')$, (z, \bar{z}') , $(-z, \bar{z}')$, $(\bar{z}, z z')$ et (\bar{z}, \bar{z}') .

Si l'on interprète le ruban de Moebius comme le quotient de $S^1 \times I$ par l'action de l'involution qui à (z, t) associe $(-z, -t)$, les seules involutions sur le ruban de Moebius sont, à un changement de paramétrage près, celles qui se relèvent dans $S^1 \times I$ par les applications qui à (z, t) associent respectivement $(z, -t)$ et (\bar{z}, t) .

Si l'on interprète la bouteille de Klein comme le quotient de $S^1 \times S^1$ par l'action de l'involution qui à (z, z') associe $(-z, \bar{z}')$, les seules involutions sur la bouteille de Klein sont, à un changement de paramétrage près, celles qui se relèvent dans $S^1 \times S^1$ par les applications qui à (z, z') associent respectivement $(z, -z')$, (z, \bar{z}') , $(z, -\bar{z}')$, (\bar{z}, z') et $(\bar{z}, -z')$.

En outre, les involutions énumérées ci-dessous sont deux à deux

non conjuguées.

Démonstration: Le lemme 1.17 permet d'énumérer toutes les involutions sur les surfaces considérées. On vérifie aisément que chacune d'entre elles est conjuguée dans le groupe des automorphismes de la surface à une involution de la liste ci-dessous. D'autre part, la considération de l'ensemble des points fixes, de l'application induite dans l'homologie de dimension 1 et de l'action sur le bord des involutions exhibées dans l'énoncé permet de voir que celles-ci sont deux à deux non conjuguées. \square

De la même façon, on déduit du lemme 1.17 le

COROLLAIRE 1.19. Soit F une surface munie d'une structure p de S^1 -fibré ou de \mathbb{I} -fibré de base p et d'une involution fibree τ . Si F est différente de $S^1 \times S^1$, il existe un paramétrage de F pour lequel τ s'identifie à l'une des involutions énumérées au corollaire 1.18 et pour lequel les fibres de p sont de type $\{*\} \times S^1$ ou $\{*\} \times \mathbb{I}$.

Si F est isomorphe à $S^1 \times S^1$, il existe un paramétrage de F pour lequel τ s'identifie à l'application qui à (z, z') associe $(z, -z'), (z, \bar{z}'), (z, z \bar{z}'), (-z, z'), (-z, \bar{z}'), (-z, -z'), (\bar{z}, z'), (\bar{z}, -z'), (\bar{z}, \bar{z}')$ ou $(\bar{z}, z \bar{z}')$ et pour lequel les fibres de p sont de type $\{*\} \times S^1$.

LEMME 1.20. Dans $S^1 \times S^1$ ou $S^1 \times \mathbb{I}$, soient τ l'une des involutions énumérées au corollaire 1.18, et C un système de courbes essentielles stable par τ . Il existe alors une déformation équivariante égale à l'identité sur le bord qui "raidit" C , c'est à dire fait en

sorte que chaque composante de C soit une courbe de $S^1 \times I$ paramétrée par une application de la forme

$$t \mapsto (e^{\pi i t}, \theta) \quad \text{ou} \quad t \mapsto (e^{2\pi i(\alpha t + \beta)}, t),$$

où $t \in I = [-1, +1]$, $\theta \in I$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$, ou bien une courbe de $S^1 \times S^1$ paramétrée par une application de la forme

$$t \mapsto (e^{2\pi i(pt + \alpha)}, e^{2\pi i(qt + \beta)}),$$

où $t \in \mathbb{R}$, $p, q \in \mathbb{Z}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Démonstration: Limitons nous au cas de $S^1 \times S^1$. Le raisonnement pour $S^1 \times I$ est similaire et laissé au soin du lecteur. La

propriété étant automatiquement vérifiée pour les composantes de C qui sont des composantes de l'ensemble des points fixes de τ , on peut supposer qu'aucune composante de C n'est de ce type.

Soient $p, q \in \mathbb{Z}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ choisis de telle sorte que la courbe γ paramétrée par

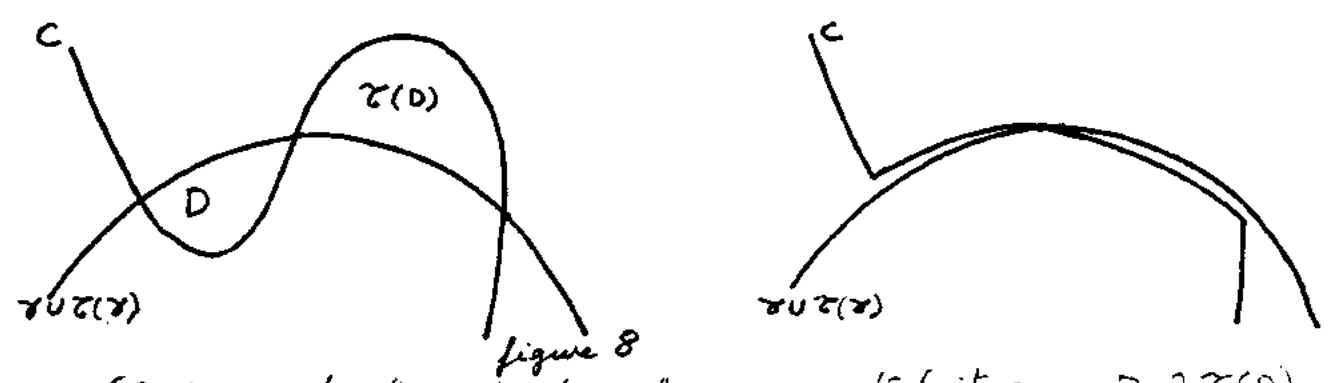
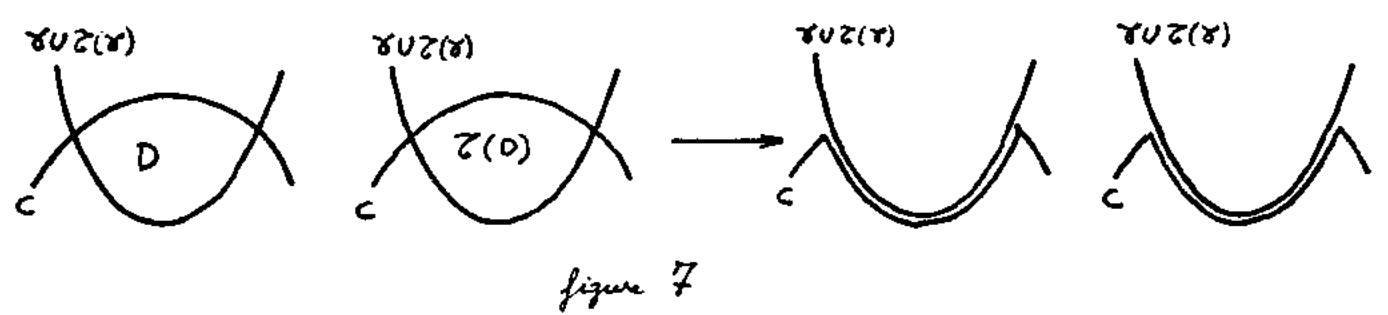
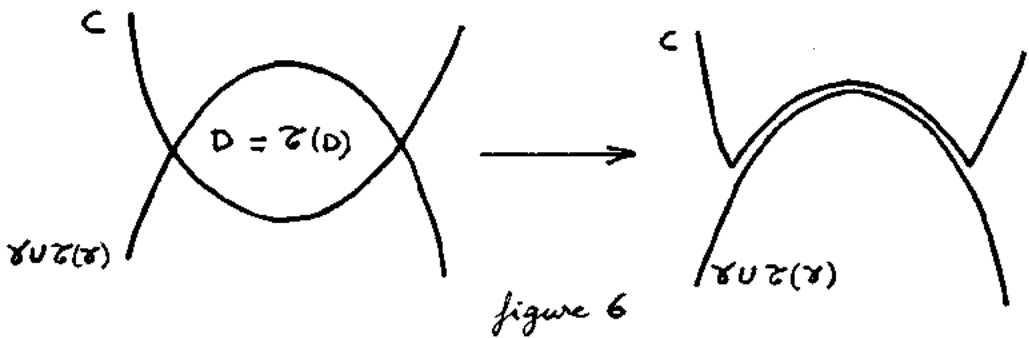
$$t \mapsto (e^{2\pi i(pt + \alpha)}, e^{2\pi i(qt + \beta)})$$

soit homologue à chaque composante de C et que, si τ possède des points fixes isolés situés dans $C \cup \gamma$, au moins l'un d'entre eux soit contenu dans $C \cap \gamma$.

Le même raisonnement qu'à la proposition 1.7 permet de déformer équivariamment C de sorte que son intersection avec $\gamma \cup \tau(\gamma)$ soit transverse (remarquons que, ou bien $\gamma = \tau(\gamma)$, ou bien $\gamma \cap \tau(\gamma) = \emptyset$). Déformons équivariamment C de sorte qu'en outre le nombre de composantes de $C \cap (\gamma \cup \tau(\gamma))$ soit minimum.

Supposons que $C \cap (\gamma \cup \tau(\gamma))$ soit non vide. Puisque γ est homologue à chaque composante de C , il existe un disque D tel que \bar{D} soit une composante de $(S^1 \times S^1) - (C \cup \gamma \cup \tau(\gamma))$ et que $\partial D \cap C$ et $\partial D \cap (\gamma \cup \tau(\gamma))$ soient deux segments dont la réunion est égale à ∂D . Les systèmes de courbes C et $\gamma \cup \tau(\gamma)$ étant essentiels, l'intersection de D et de $\tau(D)$ ne peut être

égale à $\partial D \cap C$ ou à $\partial D \cap (\gamma \cup \bar{\gamma}(\gamma))$. Donc, ou bien $D = \bar{\gamma}(\gamma)$,
 ou bien $D \cap \bar{\gamma}(\gamma)$ est vide ou formée d'un ou deux points. Or,
 si $D = \bar{\gamma}(\gamma)$ ou si le cardinal de $D \cap \bar{\gamma}(\gamma)$ est inférieur ou égal
 à 1, on peut aisément diminuer le nombre de composantes de
 $C \cap (\gamma \cup \bar{\gamma}(\gamma))$ par une déformation équivariante de C que
 l'on n'explicitera que par les figures 6 à 8.



Cette éventualité étant exclue, on en déduit que $D \cap \bar{\gamma}(\gamma)$
 est formée de deux points de ∂D . En "aplatissant" alors équi-
 variantement $D \cup \bar{\gamma}(\gamma)$, on peut alors déformer équivariamment
 C de sorte que l'une de ses composantes coïncide avec $\bar{\gamma}$.
 En définitive, on a ainsi pu déformer équivariantement C de
 sorte que, ou bien $\gamma \cap C = \emptyset$, ou bien γ est une composante

de C . Remarquons que, d'après le choix de δ , on aboutit à la deuxième éventualité si ζ possède un point fixe isolé situé dans C puisque cette propriété est conservée par déformation équivariante de C .

Si $\gamma \cap C = \emptyset$, il existe un anneau A dans $S^1 \times S^1$ tel que ∂A ait pour composantes connexes $A \cap (\gamma \cup \zeta(\gamma))$ et $C_1 = A \cap C$. L'intérieur de A étant une composante connexe de $(S^1 \times S^1) - (C \cup \gamma \cup \zeta(\gamma))$, on a $\zeta(A) = A$ ou $\zeta(A) \cap A = \emptyset$. La courbe C_1 ne peut être dans $A \cap \zeta(A)$, car elle contiendrait sinon un point fixe isolé de ζ , ce qui entraînerait que γ soit une composante de C , d'après la remarque faite plus haut. De même pour δ . En utilisant éventuellement le lemme 1.16, on peut alors construire une déformation équivariante de C qui amène C_1 sur δ .

Dans les deux cas, on a ainsi pu "raidir" une composante C_1 de C par une déformation équivariante. Le même procédé permet de raidir une autre composante de C par une déformation équivariante égale à l'identité sur $C_1 \cup \zeta(C_1)$, et une itération simple fournit le résultat cherché. \square

LEMME 1.21. Dans $I \times I$, $S^1 \times I$ ou $S^1 \times S^1$, soit ζ l'une des involutions standard énumérées au lemme 1.14 ou au corollaire 1.18, et soit φ un automorphisme équivariant isotope à l'identité par une isotopie préservant éventuellement la structure de variété à coins de $I \times I$. Alors φ est équivariamment isotope par une isotopie de variété à coins à une application se décomposant en produit dont les facteurs sont l'identité de I , l'identité de S^1 et l'homothétie de rapport -1 de S^1 .

Démonstration : Prenons nous par exemple dans le cas de $S^1 \times S^1$. À l'aide du corollaire 1.18, on peut aisément trouver dans $S^1 \times S^1$ un anneau A tel que :

- a) chaque composante de ∂A est de type $\{*\} \times S^1$ ou $S^1 \times \{*\}$.
- b) $S^1 \times S^1 = A \cup \tau(A)$ et $\mathring{A} \cap \tau(\mathring{A}) = \emptyset$.
- c) si τ échange les composantes de ∂A , la classe (orientée) de $H_1(S^1 \times S^1)$ représentant une composante de ∂A est laissée fixe par l'application induite par τ .

Grâce au lemme 1.20, on peut trouver une déformation équivariante de φ après laquelle $\varphi(\partial A)$ est "raidie". Puisque φ est isotopé à l'identité, $\varphi(\partial A) \cap \partial A$ est alors ou bien vide, ou bien formé de composantes de ∂A .

Si chaque composante de ∂A est stable par τ , il en est de même de chaque composante de $\varphi(\partial A)$. Aucune composante de $\varphi(\partial A)$ n'est donc incluse dans $\mathring{A} \cup \tau(\mathring{A})$, ce qui entraîne que $\varphi(\partial A)$ est égal à ∂A .

Si τ échange les composantes de ∂A , et si $\varphi(\partial A) \cap \partial A$ est vide, il existe dans $S^1 \times S^1$ un anneau A_1 dont le bord est formé d'une composante de ∂A et d'une composante de $\varphi(\partial A)$. Puisque τ échange entre elles les composantes de ∂A et celles de $\varphi(\partial A)$, l'intersection de A_1 et de $\tau(A_1)$ est vide. En "aplatissant" $A_1 \cup \tau(A_1)$ de façon équivariante, on peut alors construire une déformation équivariante de φ après laquelle $\varphi(\partial A) = \partial A$.

On peut ainsi supposer désormais que $\varphi(\partial A) = \partial A$. Puisque chaque composante de ∂A est de type $\{*\} \times S^1$ ou $S^1 \times \{*\}$, on a d'autre part un paramétrage canonique de chaque composante de ∂A par S^1 .

Considérons d'abord le cas où ni φ , ni τ n'échangent les composantes de ∂A . Puisque φ est isotopé à l'identité, cela entraîne que A est stable par φ et que la restriction de φ à chaque composante de ∂A est isotopé à l'identité. D'après le lemme 1.15,

il existe une déformation équivariante de la restriction de φ à une composante de ∂A qui transforme celle-ci en l'identité ou l'application qui à r_2 associe $-r_2$, pour le paramétrage canonique de cette composante par S^1 . Comme on peut aisément étendre cette déformation en une déformation équivariante de φ tout entier, on peut ainsi supposer que la restriction de φ à chaque composante de ∂A est égale à l'identité ou à l'application qui à r_2 associe $-r_2$. Il faut maintenant séparer deux cas:

Si τ renverse l'orientation des composantes de ∂A , elle associe (r_2, r_2') à $(r_2, -r_2')$. Supposons par exemple que les composantes de ∂A soient de type $\{*\} \times S^1$ et soit k le segment $A \cap (S^1 \times \{1\})$. Du fait que la classe de k $U\tau(k)$ dans $H_1(S^1 \times S^1)$ est laissée fixe par l'application induite par φ , on déduit aisément que $\varphi(k)$ est isotopie dans A par une isotopie égale à l'identité sur ∂A à k ou bien au translaté de k par l'application qui à (r_2, r_2') associe $(r_2, -r_2')$. La restriction de φ à A est donc isotopie par une isotopie égale à l'identité sur ∂A à l'identité ou à la translation qui associe $(r_2, -r_2')$ à (r_2, r_2') . En étendant cette isotopie à $S^1 \times S^1$ tout entier à l'aide de τ , on obtient ainsi la déformation équivariante de φ cherchée.

Si τ ne renverse pas l'orientation des composantes de ∂A , soit U un voisinage régulier de l'une de ces composantes. À l'aide du corollaire 1.18, faisons choix d'un paramétrage de U par $S^1 \times I$ de sorte que $S^1 \times \{0\}$ corresponde à $U \cap \partial A$ avec le paramétrage canonique par S^1 et que la restriction de τ à U s'identifie à l'application qui à $(r_2, t) \in S^1 \times I$ associe $(r_2, -t)$ ou $(-r_2, -t)$. Considérons, pour $n \in \mathbb{Z}$, l'application φ_n égale à l'identité en dehors de U et définie sur U par:

$$(r_2, t) \mapsto (r_2 e^{2\pi i n(1-t)}, t)$$

Cette application est équivariante et équivariamment isotopie à l'identité. Soit de même φ_n' l'application définie de façon

identique pour $q \in \mathbb{Z}$ et pour l'autre composante de ∂A . L'application $\Psi_p \circ \Psi_q \circ \Psi$ est équivariamment isotopée à Ψ et, pour un choix convenable de p et q , sa restriction à A est isotopée à l'identité par une isotopie égale à l'identité sur ∂A . On raisonne alors comme précédemment pour trouver la déformation équivariante de Ψ cherchée.

Si τ échange les composantes de ∂A , la condition c) imposée à A entraîne que τ associe $(z, -z')$ à $(z, z') \in S^1 \times S^1$. Ceci implique que l'espace quotient $(S^1 \times S^1)/\tau$ est isomorphe à $S^1 \times S^1$ et un calcul simple montre que l'automorphisme $\bar{\Psi}$ du quotient induit par Ψ est isotopée à l'identité. En relevant une isotopie de $\bar{\Psi}$ à l'identité, on obtient une isotopie équivariante entre Ψ et l'identité ou τ , ce qui convient.

Il reste maintenant à étudier le cas où Ψ échange les composantes de ∂A . Soit Ψ l'application qui à (z, z') associe $(z, -z')$ ou $(-z, z')$ et qui échange les composantes de ∂A . Remarquons que τ ne peut être l'involution qui associe (z, z, z') à (z, z, z') puisque l'ensemble des points fixes de τ est formé d'une composante de ∂A et doit être laissé stable par Ψ . Ceci entraîne que Ψ est équivariante. L'application $\Psi \circ \Psi$ est équivariante, isotopée à l'identité et n'échange pas les composantes de ∂A . D'après ce qui précède, elle est équivariamment isotopée à une certaine application Ψ' qui à (z, z') associe $(z, z'), (-z, z'), (z, -z')$ ou $(-z, -z')$. On a ainsi obtenu une déformation équivariante entre Ψ et l'application $\Psi' \circ \Psi^{-1}$, qui est bien du type cherché. \square

LEMME 1.22. Soient p_1 et p_2 deux structures de S^1 -fibré ou de I -fibré sur une surface F munie d'une involution τ conservant à la fois les fibres de p_1 et celles de p_2 . Si, en outre, ces fibres sont isotopes par une isotopie conservant éventuellement la structure de variété à coins, il existe une application équivariamment isotope à l'identité (par une isotopie conservant la structure de variété à coins) qui envoie les fibres de p_1 sur celles de p_2 .

Démonstration: Plaçons nous par exemple dans le cas où F est isomorphe à $S^1 \times S^1$. Grâce au lemme 1.19, on peut trouver un isomorphisme φ_1 de $S^1 \times S^1$ sur F et une involution t_1 dans $S^1 \times S^1$ tels que les fibres de p_1 soient les courbes $p_1(\{*\} \times S^1)$, que $\varphi_1 \circ t_1 = \tau \circ \varphi_1$ et que t_1 associe $(z, z'), (z, -z'), (-z, -z'), (z, \bar{z}'), (\bar{z}, z'), (-z, \bar{z}'), (\bar{z}, -z'), (\bar{z}, \bar{z}'), (\bar{z}, z z'), (z, \bar{z} z')$ à $(z, z') \in S^1 \times S^1$. Soient de même φ_2 et t_2 ainsi associées à p_2 .

Si l'on étudie pour les différents choix possibles de t_1 énumérés ci-dessus l'ensemble de leurs points fixes, leur action sur les courbes $\{*\} \times S^1$ et automorphismes induits dans $H_1(S^1 \times S^1)$, on vérifie sans peine que ceux-ci sont deux à deux non conjugués par un automorphisme de $S^1 \times S^1$ envoyant toute courbe de type $\{*\} \times S^1$ sur une courbe de même type. Comme t_1 et t_2 sont conjugués par $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$, ceci entraîne que $t_2 = t_1$.

Quitte à composer φ_1 avec un automorphisme "linéaire" équivariant convenable de $S^1 \times S^1$, on peut supposer que $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ est isotope à l'identité. D'autre part, $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ est équivariant puisque $t_2 = t_1$. D'après le lemme 1.21, il est donc équivariamment

isotopie à l'application Ψ qui à (z, z') associe $(z, z'), (-z, z'), (z, -z')$ ou $(-z, -z')$. En composant Ψ_1 avec Ψ^{-1} , on peut se ramener au cas où $\Psi_2^{-1} \circ \Psi_1$ est équivariamment isotopie à l'identité. L'automorphisme $\Psi_1 \circ \Psi_2^{-1}$ de M convient alors. \square

LEMME 1.23. Sur $I \times I$ ou $S^1 \times I$, soit τ l'une des involutions énumérées au lemme 1.14 ou au corollaire 1.18 et soit Ψ un automorphisme préservant $I \times \{0, 1\}$ dans le cas de $I \times I$ et vérifiant l'une des conditions suivantes :

(i) $\Psi \circ \tau = \tau \circ \Psi$

(ii) $\Psi \circ \tau = \tau \circ \Psi^{-1}$

Si Ψ vérifie la condition (i), il existe une isotopie équivariante $u \mapsto \Psi_u$ telle que pour tout u , Ψ_u préserve éventuellement $I \times \{0, 1\}$, que $\Psi_0 = \Psi$ et que Ψ_1 se décompose en un produit dont les facteurs sont choisis parmi l'application qui à $t \in I$ associe t ou $-t$ et l'application qui à $z \in S^1$ associe $z, -z, \bar{z}$ ou $-\bar{z}$.

Si Ψ vérifie la condition (ii), il existe une isotopie $u \mapsto \Psi_u$ telle que Ψ_u préserve éventuellement $I \times \{0, 1\}$ pour tout u , que Ψ_0 soit l'identité et que l'application $\tau \circ \Psi_1 \circ \tau \circ \Psi \circ \Psi_1^{-1}$ soit du type imposé à Ψ_1 ci-dessus.

Démonstration : Si Ψ vérifie la condition (i), il suffit de se ramener au cas où Ψ est isotopie à l'identité en composant Ψ avec une application "linéaire" convenable, puis d'appliquer le lemme 1.21.

Si Ψ vérifie la condition (ii), l'application $\tau \circ \Psi$ est une involution et il existe donc un automorphisme Ψ' et une involution τ' parmi celles énumérées au lemme 1.14 ou au corollaire 1.18 telle que

$$\tau \circ \Psi = \Psi', \tau' \circ \Psi.$$

Quitte à composer Ψ avec une application commutant avec τ' convenable, on peut se ramener au cas où Ψ est isotopé à l'identité, ce qui achève la démonstration puisque

$$\tau \circ \tau' = \tau \circ \Psi \circ \tau \circ \Psi \circ \Psi^{-1},$$

est du type cherché. \square

F. Involutions sur quelques variétés fibrées de dimension 3.

L'outil essentiel dans l'étude des involutions sur les variétés de dimension 3 est le résultat suivant, dû à

F. Waldhausen ([Wa3]).

LEMME 1.24. Soit τ une involution orientée sur D^3 . Il existe un isomorphisme de D^3 avec la boule standard de \mathbb{R}^3 qui identifie τ avec la rotation d'angle π autour d'un axe.

Du lemme 1.24, on déduit facilement par un paramétrage convenable de l'espace quotient les deux lemmes suivants.

LEMME 1.25. À un changement de paramétrage près, les seules involutions orientées conservant la structure de variété à coins sur $I \times I \times I$ sont celles qui à (t, u, v) associent, respectivement $(-t, -u, v)$ et $(u, t, -v)$.

LEMME 1.26. À un changement de paramétrage près, les seules involutions orientées conservant la structure de variété à coins sur $D^2 \times I$ sont celles qui à (β, t) associent respectivement $(-\beta, t)$ et $(\bar{\beta}, -t)$.

LEMME 1.27. Les seules involutions^{orientées} sur le tore plein $S^1 \times D^2$ sont, à un changement de paramétrage près, celles qui à (β, β')

associent respectivement $(\gamma, -\gamma'), (-\gamma, \gamma'), (-\gamma, -\gamma')$ et $(\bar{\gamma}, \bar{\gamma}')$.
LEMME 1.28. Les seules involutions orientées conservant la structure de variété à coins sur l'anneau épais $S^1 \times S^1 \times I$ sont, à un changement de paramétrage près, celles qui à (γ, t, u) associent respectivement $(\gamma, -t, -u), (-\gamma, t, u), (-\gamma, -t, -u), (\bar{\gamma}, -t, u)$ et $(\bar{\gamma}, u, t)$.

LEMME 1.29. Soit M une variété admettant une structure de $S^1 \times I$ -fibré de base S^1 (ce qui revient à dire que M est isomorphe à $S^1 \times S^1 \times I$ ou au I -fibré sur la bouteille de Klein). Si $\tilde{\sigma}$ est une involution orientée sur M , il existe un automorphisme φ de $S^1 \times I$ et un isomorphisme de M avec $\mathbb{R} \times (S^1 \times I) / N$, où N est la relation d'équivalence qui identifie (u, x) et $(u+1, \varphi(x))$, pour lequel $\tilde{\sigma}$ est l'image du produit d'un automorphisme α de \mathbb{R} et d'une involution β de $S^1 \times I$. On fait imposer que β associe $(\gamma, t), (\gamma, -t), (-\gamma, t), (-\gamma, -t), (\bar{\gamma}, t)$ ou $(\bar{\gamma}, -t)$ à $(\gamma, t) \in S^1 \times I$, que φ associe $(\gamma, t), (-\gamma, t), (\bar{\gamma}, -t)$ ou $(-\bar{\gamma}, -t)$ à (γ, t) et que l'une des trois conditions suivantes soit réalisée:

- (i) pour tout $u \in \mathbb{R}$, $\alpha(u) = u$, et β conserve l'orientation de $S^1 \times I$.
- (ii) pour tout $u \in \mathbb{R}$, $\alpha(u) = 1-u$, et β renverse l'orientation de $S^1 \times I$.
- (iii) pour tout $u \in \mathbb{R}$, $\alpha(u) = u + \frac{1}{2}$ et φ est l'identité et β conserve l'orientation de $S^1 \times I$.

En particulier, si M est isomorphe à $S^1 \times S^1 \times I$ choisir cet isomorphisme de sorte que $\tilde{\sigma}$ soit le produit d'une involution de $S^1 \times S^1$ et d'une involution de I .

Démonstration des lemmes 1.27 à 1.29: Le principe est le même dans tous les cas: Si M est la variété étudiée, on construit dans M une surface connexe A telle que $A = \bar{\tau}(A)$ ou $A \cap \bar{\tau}(A) = \emptyset$, et telle que la variété obtenue en découpant M le long de $A \cup \bar{\tau}(A)$ ait été étudiée dans un lemme précédent. On se limitera donc à expliciter le cas des involutions orientées de $S^1 \times S^1 \times I$ qui échangent les deux composantes du bord, et à donner quelques indications sur celui des I -fibrés sur la bouteille de Klein, en laissant au lecteur le soin de s'inspirer de cet exemple pour en déduire les autres démonstrations (en général moins compliquées).

Soient T_1 et T_2 les deux composantes du bord de $S^1 \times S^1 \times I$, identifiées à $S^1 \times S^1$ par restriction du paramétrage de $S^1 \times S^1 \times I$.

L'application composée

$$H_1(S^1 \times S^1) \xrightarrow{\cong} H_1(T_1) \xrightarrow{\bar{\tau}} H_1(T_2) \xrightarrow{\cong} H_1(S^1 \times S^1)$$
 définit un élément involutif de $GL_2(\mathbb{Z})$ de déterminant -1 pour le choix dans $H_1(S^1 \times S^1)$ de la base (l, m) où l représente $\{*\} \times S^1$, m représente $S^1 \times \{*\}$ et où S^1 est muni de son orientation canonique. Or, toute matrice involutive de déterminant -1 est conjuguée à l'une des deux matrices

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & +1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ +1 & +1 \end{pmatrix}$$

par un élément de $GL_2(\mathbb{Z})$. En utilisant cet élément de $GL_2(\mathbb{Z})$ pour changer le paramétrage de $S^1 \times S^1 \times I$, on peut ainsi faire en sorte que cette application soit représentée dans la base (l, m)

par la matrice ci-dessus. Soit A l'anneau $\{1\} \times S^1 \times I$. Le lemme (2.6) de [Wa 1] assure que A est essentiel. Pour $i = 1, 2$, les deux courbes $A \cap T_i$ et $\tilde{\gamma}(A) \cap T_i$ sont homologues, et donc isotopes dans T_i . Déformons A , ce qui revient à déformer le paramétrage de $S^1 \times S^1 \times I$, de sorte que son intersection avec $\tilde{\gamma}(A)$ soit transverse et que le nombre de composantes de $A \cap \tilde{\gamma}(A)$ soit minimum pour les déformations de ce type. L'intersection de A et de $\tilde{\gamma}(A)$ est alors une réunion de courbes fermées et de chemins.

Supposons que l'une de ces courbes fermées ne soit pas essentielle dans A . Elle borde alors ~~un~~ un disque D dans A , et donc un disque D' dans $\tilde{\gamma}(A)$ puisque celui-ci est essentiel. On peut alors procéder comme au lemme 1.12 pour définir une déformation de A qui élimine de $A \cap \tilde{\gamma}(A)$ la composante ∂D , ce qui est exclu par hypothèse. Toutes les courbes fermées composantes de $A \cap \tilde{\gamma}(A)$ sont donc essentielles dans A et, par symétrie, dans $\tilde{\gamma}(A)$.

Soit k une composante de $\tilde{\gamma}(A) \cap A$ qui est un chemin. Supposons d'abord que les deux composantes de ∂k soient situées dans la même composante du bord de $S^1 \times S^1 \times I$, par exemple dans T_1 . Le chemin k est parallèle vers le bord dans A par un disque D , et donc parallèle vers le bord dans $\tilde{\gamma}(A)$ par un disque D' puisque $\tilde{\gamma}(A)$ est essentiel. Comme $A \cap \tilde{\gamma}(A)$ ne contient aucune composante fermée inessentielle dans $\tilde{\gamma}(A)$, on peut choisir k de sorte que $B' \cap A = \emptyset$. La courbe $\partial(D \cup D')$ est inessentielle dans $S^1 \times S^1 \times I$, et donc dans T_1 qui est essentiel (lemme (2.6) de [Wa 1]). Soit D'' le disque qu'elle borde dans T_1 . La sphère $D \cup D' \cup D''$ bordant une boule dans $S^1 \times S^1 \times I$, on conclut comme précédemment pour éliminer de $A \cap \tilde{\gamma}(A)$ la composante k , ce qui est exclu. L'intersection de A et $\tilde{\gamma}(A)$ est ainsi uniquement formée de chemins

dont les extrémités ne sont pas dans la même composante de ∂A (ou de ∂A), ou bien de courbes fermées essentielles. C'est à dire parallèles au bord dans A et dans $\tilde{\tau}(A)$.

On veut montrer que l'on peut déformer A de sorte que $A \cap \tilde{\tau}(A) = \emptyset$ ou bien $A = \tilde{\tau}(A)$. Comme l'on a supposé que le nombre de composantes de $A \cap \tilde{\tau}(A)$ est minimum, il suffit donc de construire, si $\tilde{\tau}(A) \cap A \neq \emptyset$, une déformation de A après laquelle $\tilde{\tau}(A) = A$.

Supposons qu'il existe une composante de $A \cap \tilde{\tau}(A)$ qui est un chemin joignant T_1 à T_2 . Toutes les composantes de $A \cap \tilde{\tau}(A)$ sont alors de ce type et $A - \tilde{\tau}(A)$ et $\tilde{\tau}(A) - A$ sont réunions disjointes de "carrés" isomorphes à $I \times I$. Les deux courbes $A \cap T_1$ et $\tilde{\tau}(A) \cap T_1$ étant isotopes, il existe un disque D_1 dans T_1 tel que D_1 soit une composante de $T_1 - (A \cup \tilde{\tau}(A))$ et que $D_1 \cap A$ et $D_1 \cap \tilde{\tau}(A)$ soient connexes. Soit K (resp. K') l'adhérence du carré de $A - \tilde{\tau}(A)$ (resp. $\tilde{\tau}(A) - A$) adjacent à D_1 . Le bord du disque $D_1 \cup K \cup K'$ borde dans T_2 un disque D_2 puisque T_2 est essentiel dans $S^1 \times S^1 \times I$, et la sphère $D_1 \cup K \cup K' \cup D_2$ borde une boule B dans $S^1 \times S^1 \times I$.

Si $\tilde{\tau}(B) = B$ ou si $\tilde{\tau}(B) \cap B = \emptyset$, le processus habituel permet de définir une déformation de A diminuant le nombre de composantes de $A \cap \tilde{\tau}(A)$, ce qui est exclu. Donc $\tilde{\tau}(B) \neq B$ et $\tilde{\tau}(B) \cap B \neq \emptyset$. D'autre part, on vérifie aisément que si $\tilde{\tau}(B) \neq B$, alors $\tilde{\tau}(B) \cap B$ est réunion de composantes de $A \cap \tilde{\tau}(A)$.

Si $\tilde{\tau}(B) \cap B$ est formé d'une seule composante de $A \cap \tilde{\tau}(A)$,

déformons A en faisant coïncider K avec K' . Alors, en "détachant A de K' vers l'extérieur de B ", on peut éliminer de $A \cap \tilde{\tau}(A)$ la composante de $A \cap \tilde{\tau}(A) \cap B$ qui n'est pas dans $\tilde{\tau}(B)$, ainsi que son image par $\tilde{\tau}$, ce qui est contradictoire avec la condition imposée à A (figure 9).

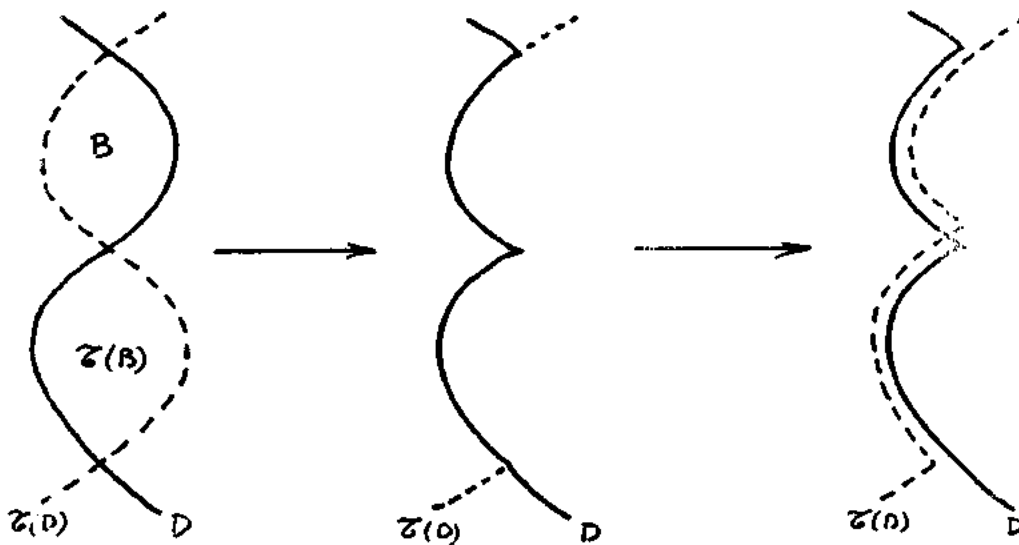


figure 9.

En définitive, les autres situations nous ayant ramenés à des situations interdites, on en déduit que $\tilde{\tau}(B) \cap B$ est formé des deux composantes de $A \cap \tilde{\tau}(A) \cap B$. L'anneau A est alors la réunion de K et de $\tilde{\tau}(K')$. Si l'on déforme A de façon à faire coïncider K avec K' , A est alors stable par $\tilde{\tau}$, ce qui est ce que l'on voulait démontrer.

Il reste maintenant à considérer le cas où toutes les composantes de $A \cap \tilde{\tau}(A)$ sont fermées et parallèles au bord dans A et $\tilde{\tau}(A)$. Si l'on découpe $S^1 \times S^1 \times I$ le long de A , on obtient un tore plein et l'image de $\tilde{\tau}(A)$ dans ce tore plein est une réunion d'anneaux, incompressibles d'après le raisonnement du lemme 1.10 puisque aucune composante de

$A \cap \tilde{\tau}(A)$ ne borde de disque dans $\tilde{\tau}(A)$. Le lemme (2.3) de [Wa¹] assure alors que tous ces anneaux sont parallèles vers le bord. Soit A_0 celui d'entre eux qui contient $\tilde{\tau}(A) \cap T_1$. Puisque A_0 est parallèle vers le bord, il existe un anneau A_1 dans T_1 et un anneau A_2 dans A tels que $A_0 \cup A_1 \cup A_2$ borde dans $S^1 \times S^1 \times I$ un tore plein V dont un méridien coupe en exactement un point une des composantes de ∂A_0 .

Si $\tilde{\tau}(V) = V$ ou si $\tilde{\tau}(V) \cap V = \emptyset$, on peut procéder comme d'habitude pour diminuer le nombre de composantes de $A \cap \tilde{\tau}(A)$, ce qui est interdit. Donc $\tilde{\tau}(V) \cap V$ est non vide et différent de V . Dans ce cas, $\tilde{\tau}(V) \cap V$ est la composante de ∂A_0 qui n'est pas dans T_1 , et $A = A_2 \cup \tilde{\tau}(A_0)$. En déformant alors A de façon à amener A_0 sur A_2 , on peut ainsi faire en sorte de $A = \tilde{\tau}(A)$.

Nous avons ainsi démontré que l'on peut choisir le paramétrage de $S^1 \times S^1 \times I$ de sorte que, si A est l'anneau $\{1\} \times S^1 \times I$, on ait $\tilde{\tau}(A) = A$ ou $\tilde{\tau}(A) \cap A = \emptyset$. Sans ce cas, le lemme 3.4 de [Wa 3] permet d'imposer en outre que $\tilde{\tau}(A)$ soit vertical pour la projection de $S^1 \times S^1 \times I$ sur $S^1 \times S^1$. Si $\tilde{\tau}(A) \cap A = \emptyset$, le relèvement d'une isotopie de $S^1 \times S^1$ permet alors de modifier le paramétrage de sorte que $A = \{1\} \times S^1 \times I$ et $\tilde{\tau}(A) = \{-1\} \times S^1 \times I$. Dans ces conditions, on obtient un ou deux anneaux épaissis isomorphes à $S^1 \times I \times I$ en découpant $S^1 \times S^1 \times I$ le long de $A \cup \tilde{\tau}(A)$. En utilisant éventuellement le lemme 1.28, le même raisonnement qu'au lemme 1.17 permet alors d'aboutir au résultat annoncé à l'aide du lemme 1.23 grâce auquel on peut "linéariser" les applications de recollement.

Dans le cas du I -fibré sur la bouteille de Klein, qui est aussi le S^1 -fibré sur le ruban de Moebius, le lemme (3.3) de [Wa 1] affirme qu'à isotopie près il existe un et un seul anneau essentiel A ne séparant pas la variété. L'anneau A est donc isotope à son image $\tau(A)$. En outre, l'anneau A peut être choisi vertical pour la structure de I -fibré et découpe la variété en un anneau épaissi. On peut donc raisonner comme précédemment. \square

Remarque. Pour la plupart des variétés et involutions étudiées dans ce paragraphe, chaque classe d'isotopie de structures de I -fibrés ou de S^1 -fibrés possède un représentant "linéaire" pour lequel l'involution est fibrée. La seule exception est celle des structures de S^1 -fibrés sur $S^1 \times S^1 \times I$ muni d'une involution échangeant les deux composantes du bord. Ce phénomène explique le rôle à part que jouera plus tard cette situation.

LEMME 1.30. Soit M l'une des variétés étudiées aux lemmes 1.25 à 1.29, munie d'une involution τ et d'une structure de S^1 -fibré ou de I -fibré π pour laquelle τ est fibrée. Les lemmes ci-dessus fournissent un paramétrage de M par un certain S^1 -fibré ou I -fibré pour lequel τ est "standard". On peut alors imposer à la structure de fibré ainsi définie sur M de coïncider avec π .
Démonstration: Soit F la base de π . Puisque τ est fibrée, elle induit sur F l'identité ou une involution que l'on notera encore τ .

Si τ n'induit pas l'identité dans F , considérons par exemple le cas où F est le tore $S^1 \times S^1$. Le lemme 1.18 permet de trouver une courbe fermée k dans F telle que $k = \tau(k)$ ou

$k \cap \tau(k) = \emptyset$ et telle que $k \cup \tau(k)$ découpe F en un ou deux anneaux. Si $A = p^{-1}(k)$, A est alors un anneau essentiel dans M tel que $A = \tau(A)$ ou $A \cap \tau(A) = \emptyset$. On conclut alors comme précédemment.

Si τ induit l'identité dans F , sa restriction à chaque fibre s'identifie à l'application antipodale. Notons encore F une section du fibré. Alors $\tau(F) \cap F = \emptyset$ et τ échange les deux composantes du complémentaire de $\tau(F) \cup F$. Extension par τ d'un paramétrage convenable de l'une de ces composantes permet de conclure. \square

LEMME 1.31. Sur $S^1 \times D^2$, soient p une fibration de Seifert et τ une involution conservant les fibres de p . On peut alors modifier le paramétrage de $S^1 \times D^2$ de sorte que τ s'identifie au produit d'une involution de S^1 et d'une involution de D^2 qui à r_z associe r_z, \bar{r}_z ou $-r_z$, et que les fibres de p soient les courbes paramétrées par les applications

$$t \mapsto \left(e^{2\pi i(pt+a)}, r e^{2\pi i(qt+b)} \right),$$

où $t \in \mathbb{R}$, $r \in [0,1]$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, et où $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$ caractérise le type de la fibration.

Démonstration: Soit D un disque dans $S^1 \times D^2$ qui intersecte transversalement chaque fibre de p . Puisque τ est fibrée, il en est de même de $\tau(D)$. On vérifie alors que les modifications utilisées dans la démonstration de la proposition 1.3 et du lemme 1.27 pour déformer D de sorte que $D \cap \tau(D) = \emptyset$ ou $D = \tau(D)$ peuvent être effectués de sorte que D coupe encore transversalement chaque fibre. Chaque composante de la variété obtenue en

Équipant $S^1 \times D^2$ le long de $DU\mathbb{Z}(D)$ peut alors être munie
d'une structure de \mathbb{I} -fibre dont les fibres sont les trajectoires
des fibres de p . En utilisant éventuellement le lemme 1.26,
on peut ainsi obtenir un isomorphisme φ de D^2 et un
isomorphisme entre $S^1 \times D^2$ et $\mathbb{R} \times D^2 / \mathcal{N}$, où \mathcal{N} identifie
 $(u, z_0) \in \mathbb{R} \times D^2$ avec $(u+1, \varphi(z_0))$, pour lesquels les
fibres de p sont les images des courbes $\mathbb{R} \times \{*\}$ et \mathcal{Z}
est l'image de $\alpha \times \beta$, où α est l'application de \mathbb{R} qui à
 u associe $u, 1-u$ ou $u + \frac{1}{2}$ et où β est un
automorphisme de D^2 . Puisque les fibres de p sont compactes,
 φ est périodique.

Si $\alpha(u) = u + \frac{1}{2}$, le fait que \mathcal{Z} soit une involution
entraîne que $\varphi = \beta^2$. L'application β est ainsi périodique,
et conserve l'orientation de D^2 puisque α conserve celle
de \mathbb{R} . On peut donc paramétrer D^2 de sorte que β
s'identifie à une rotation, ce qui fournit le paramétrage
de $S^1 \times D^2$ cherché.

Si $\alpha(u) = u$, l'application β est une involution
et commute avec φ . Cette dernière induit donc un
automorphisme périodique $\bar{\varphi}$ de D^2/β , qui est un
disque puisque β est orientée. En relevant un paramétrage
convenable de D^2/β , on peut ainsi faire en sorte que
 $\bar{\varphi}$ soit une rotation de D^2 et que β envoie z_0 sur $-z_0$,
ce qui permet de conclure.

Si $\alpha(u) = 1-u$, alors β est une involution qui
renverse l'orientation de D^2 et vérifie $\beta \circ \varphi = \varphi^{-1} \circ \beta$.
On veut trouver un paramétrage de D^2 pour lequel
 β est l'involution de conjugaison et φ est une rotation.
Ceci est immédiat si φ est l'identité. Si φ est d'ordre

$2k$, et si on a montré ce résultat pour tout automorphisme φ' d'ordre k , φ induit dans D^2/φ^k un automorphisme $\bar{\varphi}$ d'ordre k et β une involution $\bar{\beta}$ (car β commute avec $\varphi^k = \varphi^{-k}$); on obtient alors le résultat cherché en relevant un paramétrage de D^2/φ^k par D^2 pour lequel $\bar{\varphi}$ et $\bar{\beta}$ sont respectivement une rotation et l'application de conjugaison. Nous supposons donc désormais que φ est d'ordre impair différent de 1. L'ensemble des points fixes de β est un segment σ et φ a un unique point fixe x_0 , situé sur σ . D'autre part, l'intersection de σ et de $\varphi^n(\sigma)$ est réduite à x_0 pour tout n non multiple de l'ordre de φ , car

$$\varphi^n(x) \in \sigma \cap \varphi^n(\sigma) \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi^n(x) = \beta \circ \varphi^n(x) = \varphi^{-n} \circ \beta(x) \\ \beta(x) = x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \varphi^{2n}(x) = x \Rightarrow x = x_0$$

car φ est d'ordre impair. Les segments $\varphi^n(\sigma)$ découpent donc D^2 en secteurs angulaires, dont chacun est un domaine fondamental pour l'action de φ et de β . On conclut alors aisément. \square

Si M est une variété de Seifert, les résultats de [Wa 1] et de [OVZ] montrent qu'en dehors d'un certain nombre d'exceptions, il n'existe à isotopie près qu'une fibration de Seifert sur M . Une grande partie des exceptions trouve son origine dans le fait suivant: Si M est isomorphe au S^1 -fibré sur le ruban de Moebius, M est aussi isomorphe au fibré de Seifert $Q = (0, 1/0; (2, 1)(2, 1))$ (voir par exemple le paragraphe 3 de [Wa 1]). Le lemme ci-dessous prouve cet isomorphisme en présence d'une involution

LEMME 1.32. Si M est isomorphe au S^1 -fibré sur le ruban

de Moebius et est muni d'une involution τ , il existe sur M une structure de S^1 -fibré de base le ruban de Moebius et une fibration de Seifert de type Q pour lesquelles τ envoie fibre sur fibre.

Démonstration : Le lemme 1.19 permet d'exhiber toutes les involutions de M . En éliminant les cas isomorphes entre eux, on obtient un automorphisme orienté φ de $S^1 \times I$ qui échange les deux composantes de son bord et un isomorphisme entre M et $\mathbb{R} \times (S^1 \times I) / \nu$, où ν identifie $(u, x) \in \mathbb{R} \times (S^1 \times I)$ avec $(u+1, \varphi(x))$, pour lesquels τ s'exprime sous l'une des formes suivantes :

$$(i) \quad \tau(u, z, t) = (u, -z, t) \quad \text{et} \quad \varphi(z, t) = (\bar{z}, -t)$$

$$(ii) \quad \tau(u, z, t) = (u, \bar{z}, -t) \quad \text{et} \quad \varphi(z, t) = (\bar{z}, -t)$$

$$(iii) \quad \tau(u, z, t) = (1-u, z, -t) \quad \text{et} \quad \varphi(z, t) = (\bar{z}, -t)$$

$$(iv) \quad \tau(u, z, t) = (1-u, -z, -t) \quad \text{et} \quad \varphi(z, t) = (\bar{z}, -t)$$

$$(v) \quad \tau(u, z, t) = (u, \bar{z}, -t) \quad \text{et} \quad \varphi(z, t) = (-\bar{z}, -t)$$

Ceci fournit immédiatement une structure de S^1 -fibré sur M pour laquelle τ est fibrée.

D'autre part, φ étant périodique, les fibres $\mathbb{R} \times \{*\} \times \{*\}$ définissent dans le quotient M une fibration de Seifert dont les fibres exceptionnelles correspondent au produit par \mathbb{R} des points fixes de φ , c'est à dire dans les cas (i) à (iv), et dans le cas (v). En outre, ces fibres

exceptionnelles sont d'invariants de Seifert $(2, 1)$ puisque φ est une involution et la base de la fibration est le quotient de $S^1 \times I$ par l'action de φ , c'est à dire un disque. La fibration de Seifert ainsi définie est donc bien la fibration Q , et il est clair que τ est fibrée pour cette fibration. \square

G. La complexité d'une variété de Seifert.

Par convention, le genre d'une surface fermée F sera l'entier relatif $\frac{1}{2} \beta_1(F)$ si F est orientable, et $-1 - \beta_1(F)$ si F n'est pas orientable, où $\beta_1(F)$ est le premier nombre de Betti de F . Dans le cas général, le genre d'une surface compacte F sera le genre de la surface fermée obtenue en recollant des disques sur les composantes de ∂F .

Si $f: V \rightarrow F$ est une fibration de Seifert et si V est connexe, on appellera complexité de f l'entier

$$c(f) = 4|g| + b + 2e$$

où g est le genre de F , b est le nombre de composantes de ∂V et e le nombre de fibres exceptionnelles de f .

Si $f: V \rightarrow F$ est une fibration de Seifert et si l'on ne s'impose plus à V d'être connexe, on appellera complexité de f l'élément de l'ensemble $\mathbb{R}_f^{\mathbb{N}}$ des suites réelles de support fini défini par

$$c(f) = (\dots, \alpha_2(f), \alpha_1(f), \alpha_0(f))$$

où $\alpha_i(f)$ désigne le nombre de composantes de V sur lesquelles la restriction de f est de complexité i . Remarquons que cette définition est compatible avec la précédente grâce à l'injection canonique de \mathbb{N} dans $\mathbb{R}_f^{\mathbb{N}}$. Les ensembles \mathbb{R} et \mathbb{N} étant munis, le premier de l'ordre naturel, le second de l'opposé de l'ordre naturel, on munira $\mathbb{R}_f^{\mathbb{N}}$ de l'ordre lexicographique.

Les coefficients intervenant dans la définition de la complexité sont en partie choisis de façon que le résultat suivant soit vérifié, ce qui permettra de définir la complexité d'une variété de Seifert.

LEMME 1.33. Si $f: V \rightarrow F$ est une fibration de Seifert et si aucune

composante de V n'est pas un espace lenticulaire, la complexité de f ne dépend que de la variété de Seifert V , c'est à dire que toute autre

fibration de Seifert sur V a même complexité que p .

Démonstration: Les résultats de [Wa1] et [OVZ] montrent que la fibration de Seifert est "presque" unique sur V , en dehors d'un nombre fini d'exceptions. La complexité est construite de sorte que le lemme soit vérifié pour ces exceptions. \square

L'utilité de la notion de complexité résidera dans la proposition ci-dessous, qui sera assez fréquemment utilisée.

PROPOSITION 1.34. Soit $p: V \rightarrow F$ une fibration de Seifert, et soit T une surface essentielle verticale dans V dont au moins une composante n'est pas parallèle à une composante de ∂V . Si \tilde{V} est la variété obtenue en découpant V le long de T , la complexité de \tilde{V} est strictement inférieure à celle de V .

Démonstration: Il est clair que l'on peut se limiter au cas où V est connexe. L'existence de T assure que $c(V) \geq 2$ et que si $c(V) = 2$, V est le S^1 -fibré sur l'anneau $S^1 \times I$. On vérifie aisément que la propriété est vraie si $V = S^1 \times S^1 \times I$. On peut donc désormais supposer que $c(V) \geq 3$.

Si l'une des composantes de T est parallèle à une composante de ∂V , ou si deux d'entre elles sont parallèles, la suppression dans T d'une de ces composantes ne modifie que $d_1(V)$ et $d_2(V)$. Comme nous avons supposé $c(V) \geq 3$, on peut donc limiter la démonstration au cas où les composantes de T sont non parallèles à une composante de bord et deux à deux non parallèles. Mais alors, une récurrence simple montre que la proposition sera démontrée dès qu'on l'aura prouvée pour T connexe. On supposera donc en définitive que $c(V) \geq 3$ et que T est connexe.

Notons V_1 et V_2 , avec V_2 éventuellement vide, les composantes connexes de \tilde{V} . Soient g, b, e , et c (resp. g_1, b_1, e_1 et c_1) (resp. g_2, b_2, e_2 et c_2) le genre de la base, le nombre de

composantes du bord, le nombre de fibres exceptionnelles et la complexité de V (resp. V_1) (resp. V_2) pour la fibration définie par p . Il suffit de montrer que $c_1 < c$ et $c_2 < c$.

Si T est un tore séparant,

$$|g| = |g_1| + |g_2|$$

$$b = b_1 + b_2 - 2$$

$$e = e_1 + e_2$$

et donc $c = c_1 + c_2 - 2$.

Supposons que $c_1 \geq c$, c'est à dire que $c_2 \leq 2$. Alors, puisque b_2 est non nul, V_2 est un tore plein ou est isomorphe à $S^1 \times S^1 \times I$, ce qui contredit l'essentialité de T ou le fait qu'il ne soit pas parallèle vers le bord.

Si T est un tore non séparant,

$$|g| \geq |g_1| + 1$$

$$b = b_1 - 2$$

$$e = e_1$$

et donc $c \geq c_1 + 2$,

ce qui entraîne bien que $c_1 < c$.

Si T est un anneau séparant,

$$|g| = |g_1| + |g_2|$$

$$b = b_1 + b_2 - 1$$

$$e = e_1 + e_2$$

et donc $c = c_1 + c_2 - 1$.

Si $c_1 \geq c$, alors $c_2 \leq 1$ et V_2 est un tore plein dans lequel p n'admet aucune fibre exceptionnelle, ce qui contredit l'essentialité de T .

Enfin, si T est un anneau non séparant,

$$|g| \geq |g_1|$$

$$b = b_1 + 1$$

$$e = e_1$$

et donc $c \geq c_1 + 1$,

ce qui entraîne que $c_1 < c$, et achève la démonstration de la proposition. \square

COROLLAIRE 1.35. Si V est une variété de Seifert et si W est une sous-variété verticale de dimension 3 de W telle que ∂W soit essentielle dans V et qu'au moins une composante de ∂W ne soit parallèle à aucune composante de ∂V , alors W est de complexité strictement inférieure à celle de V .

Démonstration: Si \tilde{V} est la variété obtenue en découpant V le long de ∂W , la proposition 1.34 affirme que \tilde{V} est de complexité strictement inférieure à celle de V . Or W s'identifie à la réunion disjointe d'un certain nombre de composantes de \tilde{V} , ce qui permet de conclure. \square

Enfin, nous aurons besoin plus loin du

LEMME 1.36. Si V est une variété de Seifert connexe, il existe une famille de surfaces sans bord, connexes, essentielle dans V , deux à deux disjointes et non parallèles, et non parallèles à une composante de ∂V , dont le cardinal est supérieur ou égal à $(\frac{1}{4}c(V) - 3)$.

Démonstration: Soit $p: V \rightarrow F$ une fibration de Seifert, et soient \tilde{F} la surface obtenue en retirant de F un "petit" voisinage ouvert de l'ensemble des points exceptionnels, et \bar{F} la surface fermée obtenue en recollant des disques sur F le long des composantes de ∂F . Soient g le genre de F , b le

nombre de composantes de ∂F , e le nombre de points exceptionnels et c la complexité de p .

Dans \bar{F} , soit D un disque contenant $\partial \tilde{F}$. Le disque percé $D \cap \tilde{F}$ contient un système k_1 de $(b+e-3)$ courbes fermées essentielles, non parallèles à une composante du bord et deux à deux non parallèles. Si g est non nul, \bar{F} possède un système k_2 de $(|g|-1)$ courbes essentielles deux à deux non parallèles et évitant D . La surface $p^{-1}(k_1 \cup k_2 \cup \partial D)$ si $g \neq 0$, ou $p^{-1}(k_1)$ si $g = 0$, convient alors et possède $(|g| + b + e - 3)$ composantes, ce qui est bien supérieur ou égal à $\frac{1}{4} c(V) - 3$. \square

H. Surfaces équivariantes dans les variétés de Seifert.

Nous démontrons dans ce paragraphe une forme équivariante du lemme (2.8) de [Wa 1].

PROPOSITION 1.37. Supposons M munie d'une structure de fibré de Seifert $p: M \rightarrow F$ et d'une involution orientée τ envoyant fibre sur fibre. Soit G une surface équivariante essentielle dans M dont aucune composante n'est un disque parallèle vers le bord ou une sphère. Il existe une déformation équivariante de G après laquelle G est verticale ou bien la restriction de p à G est une application de revêtement ramifié, pourvu qu'aucune des conditions suivantes ne soit réalisée :

- (i) F est la sphère S^2 et p a au plus trois fibres exceptionnelles.
- (ii) F est la sphère S^2 , l'involution induite par τ sur F conserve son orientation et p a exactement quatre fibres exceptionnelles dont deux sont stables par τ .
- (iii) F est l'espace projectif TP^2 , p admet au plus une fibre exceptionnelle.
- (iv) F est l'espace projectif TP^2 , p admet deux fibres exceptionnelles et l'image dans F d'une de ces fibres est un point fixe isolé de l'application induite par τ .

Remarque : Nous verrons plus loin (théorème 4.1) que la condition imposant à τ d'envoyer fibre sur fibre est en général superflue.

Pour démontrer la proposition 1.37, nous aurons besoin du résultat suivant.

LEMME 1.38. Soit F une surface, éventuellement non orientée, munie d'une involution τ et d'un ensemble fini $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ de points de F stable par τ (éventuellement vide). Supposons qu'aucune des conditions suivantes ne soit réalisée.

- (i) F est la sphère S^2 et $n \leq 3$.
- (ii) F est la sphère S^2 , $n = 4$ et τ conserve l'orientation de F en laissant fixes deux éléments de X .
- (iii) F est l'espace projectif \mathbb{P}^2 , $n \leq 2$ et, si $n = 2$, un élément de X est un point fixe isolé de τ .
- (iv) F est le disque D^2 et $n \leq 1$.

Il existe alors dans F un système de courbes stable par τ , non vide, évitant X , essentiel dans $\overline{F - U(X)}$, dont aucune composante n'est une composante n'est une composante de l'ensemble des points fixes de τ , ni n'est parallèle à aucune composante de $\partial F \cup \partial U(X)$, et dont le fibré normal dans F est trivial.

Démonstration : L'ensemble des points fixes de τ est formé, d'après la proposition 1.3, de courbes et de points isolés. D'autre part, la proposition 1.3 ^{aussi} montre que l'espace quotient F/τ est une surface dont le bord est la réunion des images de ∂F et des courbes de l'ensemble des points fixes de τ .

Si F/τ est différent de S^2 , \mathbb{P}^2 et D^2 , il existe une courbe essentielle dans F/τ qui évite l'image de X et de l'ensemble des points fixes isolés de τ , qui n'est parallèle à aucune composante de l'image de ∂F et dont le fibré normal dans F/τ est trivial. Les relèvements dans F de cette courbe forment un système

sauf si $F = D^2$ et si X a exactement deux points. Dans ce cas, le relèvement d'un chemin joignant un point de l'image de ∂F à un point de $\overset{\circ}{K}$ convient.

Si $F/\mathcal{C} = D^2$ et si l'ensemble des points fixes de $\tilde{\mathcal{C}}$ possède une composante K de dimension 1 contenant au plus un point de X , les conditions (i), (iii) et (iv) assurent que le système formé des relèvements de $\partial \mathcal{U}(K)$ convient.

Toutes les éventualités ayant été épuisées, la démonstration du lemme 1.38 est ainsi achevée. \square

COROLLAIRE 1.39. Pour les hypothèses de la proposition 1.37, et si M n'est pas un tore solide, il existe dans M une surface verticale essentielle équivariante dont aucune composante n'est parallèle à une composante de ∂M .

Démonstration: Soit K le système de courbe obtenu à l'aide du lemme 1.38. La connaissance par [Wa 1] et [OVZ] de toutes les fibrations de Peifert sur $S^1 \times D^2$ et $S^1 \times S^1 \times I$ permet de vérifier que $p^{-1}(K)$ satisfait aux conditions requises. \square

Démonstration de la proposition 1.37: La démonstration s'effectuera par récurrence sur la complexité de p . Pour mener à bien cette récurrence, nous démontrerons en fait le résultat suivant.

Assertion : Soient p, M, F et \mathcal{C} comme à la proposition 1.37.

Supposons qu'il existe une famille $\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ de tores et d'anneaux dans ∂M , munis chacun d'un paramétrage par $S^1 \times S^1$ ou $S^1 \times I$, et tels que :

a) $\partial M = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m$

b) $\forall i, \forall j \neq i, A_i \cap A_j \subset \partial A_i$

c) les courbes $S^1 \times \{*\}$ sont verticales pour p

d) $\forall i, \exists j / \tau(A_i) = A_j$

e) l'application composée

$$S^1 \times S^1 \text{ ou } S^1 \times I \longrightarrow A_i \longrightarrow \tau(A_i) \longrightarrow S^1 \times S^1 \text{ ou } S^1 \times I$$

est le produit d'une involution de S^1 et d'une involution de S^1 ou de I .

Enfin, soit G une surface équivariante incompressible dans M dont aucune composante n'est un disque parallèle vers le bord ou une sphère, dont toute composante ∂ -compressible a son bord vertical dans ∂M et telle que, pour tout i , $A_i \cap \partial G$ soit raidie dans A_i . Il existe alors une déformation équivariante de G , égale à l'identité sur le bord, après laquelle G est verticale ou bien la restriction de p à G est une application de revêtement ramifié.

Montrons tout d'abord que la véracité de l'assertion entraîne celle de la proposition 1.37. En effet, sous les hypothèses de la proposition, le lemme 1.19 fournit un paramétrage de chaque composante de ∂M de façon que les conditions a) à e) soient réalisées. D'après le lemme 1.20, il existe alors une déformation équivariante de G après laquelle ∂G est raidie. Nous sommes alors dans les hypothèses de l'assertion, qui permet de conclure.

Il reste maintenant à démontrer l'assertion. Dans un premier temps, nous allons rendre verticales les composantes ∂ -compressibles de G . Soit G_1 une telle composante. La surface G étant incompressible, le lemme (1.10) de [Wa 1] affirme que G_1 est un anneau parallèle vers le bord. Il existe donc un plongement d'image P de $S^1 \times I \times I / \nu$ dans M , où ν est la relation

d'équivalence définie par

$(x, t, u) \sim (x', t', u') \iff t \in \{+1, -1\}$, $x = x'$ et $t = t'$,
 tel que $G_1 = S^1 \times I \times \{-1\}$ et $P \cap \partial M = S^1 \times I \times \{+1\}$. Les
 seules surfaces incompressibles d'un tore plein étant les méridiens
 et les anneaux parallèles vers le bord, $P \cap G_1$ est une réunion
 d'anneaux parallèles vers le bord. Quitte à changer G_1 , on peut
 donc supposer que $P \cap G_1 = \emptyset$. D'autre part, G_1 étant équivariante,
 $\tilde{\tau}(P) = P$ ou $\tilde{\tau}(P) \cap P = \emptyset$. On peut donc construire une déformation
 équivariante, égale à l'identité sur le bord, qui amène G_1 sur
 $\partial U(P \cap \partial M)$, en utilisant le lemme 1.12 si $\tilde{\tau}(P) = P$. L'anneau
 $P \cap \partial M$ étant vertical, il en est de même de $\partial U(P \cap \partial M)$ et
 avons ainsi rendu G_1 et $\tilde{\tau}(G_1)$ verticaux. Une récurrence simple
 permet alors de rendre ainsi verticales toutes les composantes
 ∂ -compressibles de G_1 .

Supposons maintenant que l'assertion soit vérifiée pour
 toute variété de Peifert de complexité strictement inférieure à
 celle de M , et que M ne soit pas un tore plein. Si
 G_1, G_2, \dots, G_k sont les composantes ∂ -compressibles de G_1 ,
 nous venons de voir que l'on peut rendre ces composantes verticales.
 Soit M' la composante de $M - \overset{\circ}{U}(G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_k)$ qui est
 isomorphe à M . Si l'on décompose $\partial M'$ grâce aux anneaux et
 aux tores composantes des $A_i = \overset{\circ}{U}(G_1 \cup \dots \cup G_k)$ et de
 $\partial U(G_1 \cup \dots \cup G_k) - \partial M$, M' satisfait les hypothèses de
 l'assertion et on est ainsi ramené au cas où G_1 ne possède
 aucune composante ∂ -compressible.

On peut donc supposer en outre que G_1 est essentielle dans M .
 D'après le corollaire 1.33, il existe une surface T dans M , stable
 par $\tilde{\tau}$, verticale, essentielle, non vide, dont aucune composante

n'est parallèle à une composante de ∂M , et qui évite la réunion des ∂A_i . D'après la propriété 1.11, il existe une déformation équivariante φ telle que l'intersection de $\varphi(G)$ avec T soit s -minimale. En outre, ∂G étant raidie sur chacun des A_i et ∂T étant vertical, on vérifie aisément que φ peut être choisie égale à l'identité sur les composantes de ∂M où ∂G n'est pas verticale, et fibrée sur les composantes de ∂M où ∂G est verticale. A l'aide du lemme 1.30, on peut construire une déformation équivariante fibrée de support $U(\partial M)$ coïncidant avec φ sur ∂M . Si l'on remplace T par $\varphi^{-1}(T)$ et G par $\varphi^{-1} \circ \varphi(G)$, T possède encore les propriétés énoncées, on a modifié G par une déformation équivariante égale à l'identité sur le bord et l'intersection de G avec T est s -minimale.

Pour chaque composante de T , choisissons à l'aide du corollaire 1.19 un paramétrage par $S^1 \times S^1$ ou $S^1 \times I$ de façon que les courbes $S^1 \times \{*\}$ soient verticales et que τ s'exprime comme produit d'une involution de S^1 et d'une involution de S^1 ou de I . Grâce aux lemmes 1.20 et 1.30, on peut construire une déformation équivariante de G au voisinage de T , égale à l'identité sur le bord, qui raidit $G \cap T$. Soient alors $\tilde{M} = \overline{M - U(T)}$ la variété obtenue en découpant M le long de T , et $\tilde{G} = \tilde{M} \cap G$. D'après le lemme 1.10, \tilde{G} est incompressible dans \tilde{M} .

Toute composante ∂ -compressible de \tilde{G} a un bord vertical. En effet, si \tilde{G}_1 est une composante ∂ -compressible de \tilde{G} dont le bord n'est pas vertical, \tilde{G}_1 est un anneau parallèle vers le bord. Soit A l'anneau de $\partial \tilde{M}$ parallèle à \tilde{G}_1 tel que $\partial A = \partial \tilde{G}_1$. L'anneau A n'est pas inclus dans une composante connexe de $\overline{\partial U(T) - \partial M}$ puisque l'intersection de G avec F est s -minimale. Il n'est pas non plus inclus dans l'un des A_i puisque G est

essentielle. Comme il n'est pas vertical, il existe donc un A_i tel que $A \cap A_i$ soit une réunion de "carrés". Si k est un chemin dans un de ces carrés joignant les deux composantes de ∂A , il existe un disque D tel que $\overline{\partial D} = k$ soit un segment dans \tilde{G}_1 joignant les deux composantes de $\partial \tilde{G}_1$, ce qui contredirait l'essentialité de G .

Si l'on décompose $\partial \tilde{M}$ grâce aux composantes des $A_i - \tilde{U}(T)$ et de $\overline{\partial U(T)} - \partial M$, les hypothèses de l'assertion sont donc vérifiées par \tilde{M} et \tilde{G} . Or, d'après la proposition 1.34, \tilde{M} est de complexité strictement inférieure à celle de M , et l'hypothèse de récurrence affirme qu'il existe une déformation équivariante de \tilde{G} , égale à l'identité sur $\partial \tilde{M}$, après laquelle ou bien \tilde{G} est vertical, ou bien la restriction de p à \tilde{G} est une application de revêtement ramifié. En "recollant" cette déformation, on obtient la déformation de G dans M cherchée.

Il suffit donc maintenant d'annuler la récurrence, c'est à dire d'étudier le cas où M est un tore plein. D'après le lemme (2.3) de [Wa 1], G est formé ou bien d'anneaux parallèles vers le bord, ou bien de disques méridiens. Comme nous avons déjà montré que les composantes ∂ -compressibles de G pouvaient être rendues verticales par une déformation équivariante égale à l'identité sur le bord, il ne nous reste plus qu'à étudier le cas où G est formée de disques méridiens.

Sans un premier temps, montrons qu'il existe une déformation équivariante de G qui soit fibrée sur le bord et après laquelle la restriction de p à G est une application de revêtement ramifié. Pour cela, choisissons grâce au lemme 1.31 un paramétrage de M par $D^2 \times S^1$ pour lequel \tilde{G} s'identifie au produit d'une involution de D^2 et d'une involution de S^1 et pour lequel les fibres de p sont les

courbes paramétrées par:

$$t \mapsto (\rho e^{2\pi i(\beta t + b)}, e^{2\pi i(\alpha t + a)})$$

où $t \in \mathbb{R}$, $\rho \in [0, 1]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ et $a, b \in \mathbb{R}$. Soit k le nombre de composantes de G . Puisque ∂G est raide sur chacun des A_i , on peut aisément construire une déformation fibrée équivariante de ∂G dans ∂M , après laquelle ∂G est le système de courbes $S^1 \times \{ e^{2\pi i(\varepsilon + \ell/R)} \}_{\ell \in \mathbb{Z}}$ où ε est choisi "petit". Le lemme 1.30 permet d'étendre cette déformation en une déformation équivariante de M tout entier. D'après la proposition 1.11, on peut encore déformer équivariamment G de sorte que son intersection avec $D^2 \times \{ e^{2\pi i \ell/R} \}_{\ell \in \mathbb{Z}}$ soit \emptyset minimale. Remarquons que l'on peut imposer à cette déformation d'être égale à l'identité sur le bord. D'autre part le raisonnement habituel montre que l'intersection de G et de $D^2 \times \{ e^{2\pi i \ell/R} \}_{\ell \in \mathbb{Z}}$ est alors vide. Par une déformation équivariante fibrée sur ∂M et de support $U(\partial M)$, on peut amener maintenant ∂G sur $S^1 \times \{ e^{2\pi i \ell/R} \}_{\ell \in \mathbb{Z}}$. Enfin, le lemme 1.30 permet de construire une déformation équivariante de G , égale à l'identité sur le bord, qui amène G sur $D^2 \times \{ e^{2\pi i \ell/R} \}_{\ell \in \mathbb{Z}}$. Sans ce cas, la restriction de f à G est bien une application de revêtement ramifié.

A partir des données initiales, on a ainsi trouvé une déformation équivariante Ψ , fibrée sur ∂M , telle que la restriction de f à $\Psi(G)$ soit une application de revêtement ramifié. Grâce au lemme 1.30, on peut construire une déformation équivariante fibrée Φ , de support $U(\partial M)$, qui coïncide avec Ψ sur ∂M . La déformation composée $\Psi^{-1} \circ \Phi$ satisfait alors aux conditions cherchées, ce qui démontre l'assertion dans le cas où M est un tore plein, et achève ainsi la démonstration de la proposition 1.37. \square

COROLLAIRE 1.40. Sous les hypothèses de la proposition 1.37, et si en outre ∂M est non vide et chaque composante de G est un anneau ou un tore, il existe une fibration de Seifert π' sur M pour laquelle $\tilde{\tau}$ est fibrée et G est verticale.

Démonstration: S'il existe une déformation équivariante φ telle que $\varphi(G)$ soit verticale pour π , la fibration $\pi' = \pi \circ \varphi^{-1}$ convient. Sinon, quitte à modifier π de la même façon, la restriction de π à G est une application de revêtement ramifié. L'étude faite aux paragraphes 3 et 7 de [Wa 1] montre que M muni de π est le S^1 -fibré sur l'anneau $S^1 \times I$, le S^1 -fibré sur le ruban de Moebius ou la variété de Seifert Q de base D^2 qui possède deux fibres exceptionnelles d'invariants $(2, 1)$, et que M peut être muni d'une structure de fibré de Seifert pour laquelle G est verticale.

Si M est le S^1 -fibré sur $S^1 \times I$, le lemme 1.28 permet de construire une fibration π' pour laquelle $\tilde{\tau}$ est fibrée et G est isotope à une surface verticale. En effet, si $\tilde{\tau}$ n'échange pas les deux composantes de $S^1 \times S^1 \times \{-1, +1\}$, chaque classe d'isotopie de structures de S^1 -fibré possède un représentant pour lequel $\tilde{\tau}$ est fibré. Si $\tilde{\tau}$ échange les deux composantes de $S^1 \times S^1 \times \{-1, +1\}$, il n'existe, à isotopie près, que deux structures de S^1 -fibrés dont la fibre soit isotope à son image par $\tilde{\tau}$, et ces deux structures peuvent en outre être choisies de sorte que $\tilde{\tau}$ soit fibrée; l'existence d'une structure de S^1 -fibré pour laquelle G est verticale permet alors de conclure. On a ainsi muni M d'une fibration de Seifert π' pour laquelle $\tilde{\tau}$ est fibrée et G est isotope à une surface verticale. La proposition 1.37 nous ramène alors au cas où il existe une déformation équivariante rendant G verticale.

Si M muni de π est le S^1 -fibré sur le ruban de Moebius

il existe un isomorphisme entre M et Q qui identifie G avec une surface essentielle verticale de Q . Munissons la variété \tilde{M} obtenue en découpant M le long de G de la fibration de Seifert π' induite par celle de Q . Comme les composantes de \tilde{M} sont isomorphes à $S^1 \times D^2$ ou $S^1 \times I \times I$, les lemmes 1.27 et 1.28 permettent de modifier π' de sorte que l'image de $\tilde{\tau}$ dans \tilde{M} soit fibrée. Grâce au lemme 1.22, on peut alors "recoller" π' et obtenir le résultat cherché.

Si M muni de π est la variété Q , on procède comme ci-dessus.

□

Chapitre II

LA VARIÉTÉ EQUIVARIAMMENT CARACTÉRISTIQUE.

Dans tout ce chapitre, M sera une variété fermée.

A. Définitions.

On appellera S-variété toute sous-variété de dimension 3 de M , stable par τ , qui peut être munie d'une structure de fibré de Seifert pour laquelle τ envoie fibre sur fibre.

Remarque. Le théorème 4.1 montrera a posteriori que la condition imposant à τ d'être fibré est superflue.

Une S-variété sera dite essentielle si son bord est essentiel dans M . On vérifie aisément que ceci revient à dire que, pour toute composante V_1 de cette S-variété, V_1 n'est pas un tore plein et que l'application canonique $\pi_1(V_1) \rightarrow \pi_1(M)$ est injective.

Une S-variété V sera dite équivariamment pleine si, pour toute sous-variété W dont les composantes sont des composantes de $\overline{M-V}$, la sous-variété $V \cup W$ n'est pas une S-variété.

SCHOLIE 2.1. Toute S-variété est contenue dans une S-variété équivariamment pleine.

Démonstration : Soit V une S-variété. L'ensemble des S-variétés de la forme $V \cup W$, où W est réunion de composantes de $\overline{M-V}$, admet pour l'inclusion un élément maximal qui est une S-variété équivariamment pleine. \square

Une sous-variété V de M sera dite variété équivariamment caractéristique si c'est une S -variété essentielle équivariamment pleine et si toute S -variété essentielle peut être amenée à l'intérieur de V par une déformation équivariante. L'essentiel de ce chapitre sera consacré à la démonstration du fait que M admet toujours une variété équivariamment caractéristique (éventuellement vide) et que celle-ci est unique à isotopie équivariante près.

B. Recollement le long de son bord d'une variété fibrée.

PROPOSITION 2.2. Soit V une sous-variété de M , stable par \mathcal{G} et munie d'une structure f de I -fibré ou de fibré de Seifert pour laquelle la restriction de \mathcal{G} à V est fibrée. Soit W une sous-variété de $(\overline{M-V})$ stable par \mathcal{G} dont chaque composante W_1 admet un isomorphisme avec $F \times I$, pour une certaine surface F , tel que $W_1 \cap V$ s'identifie à $F \times \{-1, +1\}$, que $W_1 \cap V$ est verticale pour f et que les fibres respectives des restrictions de f à chaque composante de $W_1 \cap V$ sont homotopes dans W_1 par une homotopie respectant éventuellement la structure de variété à coins. Alors $V \cup W$ peut être munie d'une structure de I -fibré ou de fibré de Seifert pour laquelle la restriction de \mathcal{G} est fibrée.

Démonstration: Nous nous limiterons au cas des fibrations de Seifert, la démonstration étant identique pour les I -fibrés. Il est clair qu'il suffit de s'intéresser au cas où W/\mathcal{G} est connexe, et que chaque composante de W est isomorphe à $S^1 \times S^1 \times I$ ou $S^1 \times I \times I$.

Si W est formé de deux composantes W_1 et $\mathcal{G}(W_1)$, on peut

aisément munir W_1 d'une fibration coïncidant avec p sur $W_1 \cap V$. En transportant cette fibration sur $\mathcal{C}(W_1)$ à l'aide de \mathcal{C} , on peut ainsi obtenir une structure de S -variété sur $V \cup W$.

Supposons maintenant que W est connexe et que \mathcal{C} échange les deux composantes T_1 et T_2 de $W \cap V$. Si W est isomorphe à $S^1 \times S^1 \times I$, le lemme 1.29 permet de choisir cet isomorphisme de sorte que \mathcal{C} associe $(\bar{z}_2, z'_2, -t)$, $(\bar{z}_2, -z'_2, -t)$ ou $(\bar{z}_2, z'_2, -t)$. Comme les seules courbes fermées k dans T_1 qui sont homologues à $\mathcal{C}(k)$ dans W sont homologues à $S^1 \times \{*\} \times \{*\}$, $\{*\} \times S^1 \times \{*\}$ ou aux courbes paramétrisés par $z_2 \in S^1 \mapsto (*, z_2^2, *)$, on peut trouver sur W une fibration de Serret pour laquelle \mathcal{C} est fibré et dont les fibres sont homologues dans $W \cap V$ à celles de p . En modifiant cette fibration sur $U(T_1)$ et en transportant par \mathcal{C} cette modification dans $\mathcal{C}(U(T_1))$ qui est un voisinage régulier de T_2 , on peut trouver sur W une fibration de Serret pour laquelle \mathcal{C} est fibré et qui coïncide avec p sur $V \cap W$. Par recollage, on obtient ainsi une structure de S -variété sur $V \cup W$. Le raisonnement est analogue si W est isomorphe à $S^1 \times I \times I$.

Si W est connexe et si \mathcal{C} n'échange pas les composantes de ∂W , il existe un paramétrage de W par $S^1 \times S^1 \times I$ par exemple (le cas de $S^1 \times I \times I$ est identique) pour lequel \mathcal{C} s'exprime comme produit d'une involution de $S^1 \times S^1$ et de l'identité

de I. Munissons W de la fibration de Seifert p' obtenue en étendant canoniquement la restriction de p à $S^1 \times S^1 \times \{-1\}$. Par hypothèse, les fibres de p et p' dans $S^1 \times S^1 \times \{+1\}$ sont homologues. À l'aide du lemme 1.22, on peut alors modifier p' sur un voisinage de $S^1 \times S^1 \times \{+1\}$ de sorte que la restriction de ζ à W soit encore fibrée pour p' et que les fibres de p et p' dans ∂W coïncident. On peut ainsi définir sur $V \cup W$ une fibration de Seifert pour laquelle ζ est fibrée, ce qui achève la démonstration. \square

C. Complétion d'une S -variété essentielle équivariamment pleine.

Nous définissons dans ce paragraphe un algorithme qui nous permettra d'obtenir la variété équivariamment caractéristique de M .

LEMME 2.3. Soient V et W deux S -variétés essentielles dans M . Supposons que l'intersection de ∂V avec ∂W et celle de ∂W avec ∂V soient S -minimales, et qu'aucune composante de $W \cap \partial V$ ne soit parallèle dans W à une composante de ∂W . Alors $V \cup W$ est une S -variété.

Démonstration: Soit p (resp. p') une fibration de Seifert sur V (resp. W) pour laquelle la restriction de ζ à V (resp. W) est fibrée. D'après le lemme 1.10, $\partial V \cap W$ est incompressible dans W . D'autre part, l'intersection de ∂V avec ∂W étant S -minimale, aucune composante de $\partial V \cap W$ n'est un disque ou un anneau parallèle vers le bord. Le corollaire 1.40 permet donc de choisir p' de sorte que $\partial V \cap W$ soit verticale pour p' . De même, on peut choisir p de sorte que $\partial W \cap V$ soit verticale

pour p .

Il est clair que l'on ne change pas le problème si l'on élimine de V les composantes qui sont incluses dans W , et de W celles qui sont incluses dans V . On supposera donc désormais que toute composante de $V \cap W$ rencontre ∂V et ∂W .

Les surfaces $\partial V \cap W$ et $\partial W \cap V$ étant respectivement verticales pour p' et p , ces deux fibrations induisent chacune une structure de fibré de Seifert sur $V \cap W$. Pour chaque composante de $V \cap W$ qui n'est isomorphe ni à $S^1 \times D^2$, ni à $S^1 \times S^1 \times I$, ni au S^1 -fibré sur le ruban de Moebius, les résultats de [Wa 1] montrent que les restrictions de p à p' sont encore isotopes. Si V_1 est une composante de $V \cap W$ qui n'est pas du type ci-dessus, ∂V_1 rencontre ∂V et ∂W d'après la condition imposée précédemment et les hypothèses de la proposition excluent le cas où V_1 est isomorphe à $S^1 \times S^1 \times I$ et où ∂V_1 est formé d'une composante de ∂V et d'une composante de ∂W ; ceci entraîne que ∂V_1 contient au moins une courbe de $\partial V \cap \partial W$, laquelle est verticale à la fois pour p et p' . Puisqu'elles possèdent une fibre commune, les restrictions de p et p' à V_1 sont alors encore isotopes ([Wa 1]).

Nous avons ainsi montré que les restrictions de p et p' à $V \cap W$ sont isotopes. En particulier, les fibres de p et p' dans chaque composante de $W \cap \partial V$ sont homologues. Si l'on munit V de la fibration p et $W - \dot{U}(V)$ de la restriction de p' , on peut ainsi appliquer la proposition 2.2 à la S -variété $V \cup (W - \dot{U}(V))$. La sous-variété $V \cup W$, obtenue en recollant $V \cup (W - \dot{U}(V))$ et $U(W \cap \partial V)$ est donc une S -variété. \square

COROLLAIRE 2.4 . Soient V et W deux S -variétés essentielles. On

peut déformer équivariamment W de sorte que $V \cup W$ soit une S -variété.

Démonstration : D'après la proposition 1.11, on peut déformer équivariamment W de sorte que l'intersection de ∂V avec ∂W et celle de ∂W avec ∂V soient S -minimales. D'autre part, en utilisant éventuellement le lemme 1.29, on peut déformer équivariamment W de façon qu'aucune composante de $W \cap \partial V$ ne soit parallèle dans W à une composante de ∂W , et ce en gardant S -minimales les intersections ci-dessus. On peut ainsi déformer équivariamment W de sorte que les hypothèses du lemme 2.3 soient satisfaites, ce qui permet de conclure. \square

Soit V une S -variété essentielle équivariamment pleine qui n'est pas équivariamment caractéristique. Il existe donc une S -variété essentielle W qui ne peut être amenée à l'intérieur de V par une déformation équivariante. Grâce au corollaire 2.4, on peut choisir W de sorte que $V \cup W$ soit une S -variété essentielle. Soit V_1 une S -variété équivariamment pleine formée comme à la scholie 2.1 en rajoutant à $V \cup W$ des composantes de $\overline{M - V \cup W}$.

Affirmation : V_1 est essentielle.

Supposons que tel ne soit pas le cas. Puisque V et W sont essentielles, il existe une composante V_2 de $\overline{M - V_1}$ qui est un tore plein.

Soit p une fibration de Pervov sur V_1 pour laquelle τ est fibré. Montrons dans un premier temps que les fibres de la restriction de p à ∂V_2 ne sont pas contractibles dans V_2 : Soit V_3 la composante de V_1 intersectant V_2 . La variété V_3 n'est pas

isomorphe à $S^1 \times S^1 \times I$ car sinon une composante de V ou W serait incluse dans le tore plein $V_2 \cup V_3$, ce qui contredirait l'essentialité de V ou W . Il existe donc dans V_3 un anneau essentiel A vertical pour p dont le bord est inclus dans ∂V_2 . Si les fibres de p dans ∂V_2 sont contractibles dans V_2 , il existe deux disques méridiens D_1 et D_2 dans V_2 tels que $A \cup D_1 \cup D_2$ soit une sphère, et borde donc une boule B dans M . D'après le théorème de Van Kampen, le groupe fondamental de B est le quotient du groupe fondamental de la variété de Seifert $B \cap V_3$ par le plus petit sous-groupe distingué contenant l'image de la fibre de p . Or, on vérifie aisément que l'on n'obtient le groupe nul en "tuant" l'image de la fibre dans le groupe fondamental d'un fibré de Seifert que si celui-ci est le S^1 -fibré sur le disque. Donc $B \cap V_3$, muni de la restriction de p , est le S^1 -fibré sur le disque, ce qui contredit l'essentialité de A .

Nous avons ainsi montré que les fibres de p dans ∂V_2 ne sont pas contractibles dans V_2 . On peut donc munir $(V_2 - \mathring{U}(\partial V_2)) \cup \tilde{\tau}(V_2 - \mathring{U}(\partial V_2))$ d'une fibration de Seifert la quelle $\tilde{\tau}$ est fibrée et dont les fibres dans $\partial U(\partial V_2) \cap V_2$ sont homologues dans $U(\partial V_2)$ à celles de p dans ∂V_2 . La proposition 2.2 montre alors que $V_1 \cup V_2 \cup \tilde{\tau}(V_2)$ est une S -variété, ce qui contredirait le fait que V_1 est équivariamment pleine. \square

On dira que la S -variété essentielle équivariamment pleine V_1 ainsi obtenue est une complétion de V .

PROPOSITION 2.5. Soient V une S -variété essentielle équivariamment pleine qui n'est pas équivariamment caractéristique et V_1 une complétion de V . Alors la complexité de V_1 est

strictement supérieure à celle de V .

Démonstration : Supposons la complexité de V supérieure ou égale à celle de V_1 . Soit T la réunion des composantes de $\overline{V_1 \cap \partial V}$ qui sont essentielles dans V_1 . D'après le corollaire 1.40, on peut choisir la fibration sur V_1 de sorte que T soit verticale. Soit \tilde{V}_1 la variété obtenue en découpant V_1 le long de T . La variété V est réunion de composantes de la variété obtenue en découpant \tilde{V}_1 le long de $(\overline{V_1 \cap \partial V}) - T$. Comme les composantes de $(\overline{V_1 \cap \partial V}) - T$ sont toutes parallèles vers le bord, V est donc isomorphe à la réunion d'un certain nombre de composantes de \tilde{V}_1 , et est donc de complexité inférieure ou égale à celle de \tilde{V}_1 . On en déduit que la complexité de \tilde{V}_1 n'est pas inférieure à celle de V_1 et que, par conséquent, chaque composante de T est parallèle à une composante de ∂V_1 , d'après la proposition 1.34.

Puisque chaque composante de $\overline{V_1 \cap \partial V}$ est parallèle vers le bord ou parallèle à une composante de ∂V_1 , on peut construire à l'aide des lemmes 1.12 et 1.29 une déformation équivariante de V_1 après laquelle V est encore incluse dans V_1 , ∂V est encore verticale dans V_1 , $V \cap \partial V_1$ est réunion de composantes de ∂V , chaque composante de ∂V est parallèle à une composante de ∂V_1 et aucune composante de ∂V n'est parallèle à une composante de $(\partial V_1 - \partial V)$. Puisque V est équivariamment pleine, chaque composante de $\overline{V_1 - V}$ rencontre $(\partial V_1 - \partial V)$. On en déduit que l'intersection de V avec une composante V_2 de V_1 est, ou bien V_2 tout entier, ou bien un voisinage régulier d'une réunion de composantes de ∂V_2 , et que si V_2 est isomorphe à $S^1 \times S^1 \times I$, V_2 est incluse dans V . Si V est de complexité supérieure ou égale à celle de V_1 , ceci entraîne que $V = V_1$. Mais alors,

si W est la S -variété essentielle qui a servi à construire V_1 , W peut être amenée à l'intérieur de V par une déformation équivariante, ce qui contredit la condition qui lui était imposée. \square

D. Existence et unicité de la variété équivariamment caractéristique.

THEOREME 2.6. Il existe dans M une variété équivariamment caractéristique (éventuellement vide) et celle-ci est unique à isotopie équivariante.

Démonstration: A partir de la S -variété vide, on peut construire par complétions successives une suite de S -variétés essentielles équivariamment pleines de complexités strictement croissantes qui ne s'arrête que lorsqu'on a atteint une variété équivariamment caractéristique. L'existence d'une variété équivariamment caractéristique sera donc prouvée si l'on montre que les complexités des variétés essentielles équivariamment pleines de M sont bornées. La démonstration sera basée sur le résultat classique suivant ([Ha]):

Il existe un entier $n(M)$ tel que toute surface essentielle dans M ayant $n(M)$ composantes possède au moins deux composantes parallèles entre elles.

Soit V une S -variété essentielle équivariamment pleine dans M . Si T est une composante de ∂V , on vérifie aisément que le fait que V soit équivariamment pleine entraîne qu'au plus trois autres composantes de ∂V sont parallèles à T (le cas le plus défavorable est celui d'une composante de V isomorphe à $S^1 \times S^1 \times I$, stable par τ qui échange les deux

composantes de son bord, et encadrée par deux composantes de $\overline{M-V}$ elles aussi isomorphes à $S^1 \times S^1 \times I$). Si k est le nombre de composantes de V , la surface ∂V a au moins k composantes et on peut extraire de ∂V une surface essentielle de $\frac{1}{4}k$ composantes deux à deux non parallèles. Le nombre de composantes de V est donc majoré par $4n(M)$. D'autre part, on déduit du lemme 1.36 que la somme des complexités des composantes de V est inférieure à $4(n(M)+3)$. La complexité de V est donc majorée par l'élément $(\dots, \alpha_1, \alpha_0)$ de \mathbb{R}_+^M où α_i est nul si i est supérieur à $4(n(M)+3)$ et égal à $4n(M)$ sinon. Ceci achève la démonstration de l'existence d'une variété équivariamment caractéristique.

Soient V_1 et V_2 deux variétés équivariamment caractéristiques. Supposons la complexité de V_2 supérieure ou égale à celle de V_1 . Puisque V_1 est équivariamment caractéristique, on peut amener V_2 à l'intérieur de V_1 par une déformation équivariante. Alors, la complexité de V_2 étant supérieure ou égale à celle de V_1 , chaque composante de ∂V_2 est parallèle dans V_1 à une composante de ∂V_1 . En utilisant le fait que V_2 est équivariamment pleine et de complexité supérieure ou égale à celle de V_1 , on en déduit aisément que $\overline{V_1 - V_2}$ est un voisinage régulier de ∂V_1 dans V_1 . On peut alors construire une déformation équivariante de V_2 qui la fait coïncider avec V_1 . \square

En fait, la démonstration de l'unicité de la variété équivariamment caractéristique a pour effet que toute S -variété essentielle équivariamment pleine de complexité supérieure

ou égale à celle d'une variété équivariamment caractéristique est une variété équivariamment caractéristique. On en déduit le résultat suivant.

PROPOSITION 2.7. Soit V une S -variété essentielle équivariamment pleine. La variété V est équivariamment caractéristique si et seulement si elle est de complexité maximum parmi les S -variétés essentielles équivariamment pleines.

Chapitre III
VARIÉTÉ CARACTÉRISTIQUE
ET
VARIÉTÉ EQUIVARIAMMENT CARACTÉRISTIQUE.

A. Existence de surfaces équivariantes essentielles.

Le but de ce chapitre est la démonstration du fait que la variété équivariamment caractéristique est "presque" égale à la variété caractéristique. L'étape essentielle pour l'obtention de ce résultat consiste en le lemme ci-dessous. On n'impose plus ici à M d'être sans bord.

LEMME 3.1. Si M possède une surface essentielle dont les composantes sont des anneaux et des tores non parallèles à une composante du bord, mais n'admet aucune surface équivariante vérifiant les mêmes propriétés, alors M est une S -variété ou peut être muni d'une structure de I -fibré sur une surface fermée pour laquelle ζ envoie fibre sur fibre.

Démonstration: Soit T un anneau essentiel ou un tore essentiel non parallèle à une composante de ∂M . Déformons T de sorte que l'intersection de T et $\zeta(T)$ soit transverse, grâce à la proposition 1.9, et que le nombre de composantes de $T \cap \zeta(T)$ soit minimum. Le même raisonnement que celui effectué lors de la démonstration du lemme 1.29 montre que $T \cap \zeta(T)$ est essentiel dans T , et

donc dans $\tilde{\tau}(T)$. Puisque $T \cap \tilde{\tau}(T)$ est non vide (d'après la condition imposée à M), $T \cap \tilde{\tau}(T)$ découpe ainsi T et $\tilde{\tau}(T)$ en anneaux ou bien en "carrés", c'est à dire en disques dont l'intersection avec ∂M est la réunion de deux segments disjoints.

Considérons la surface $\partial U(T \cup \tilde{\tau}(T))$. D'après ce qui précède, c'est une surface équivariante dont les composantes sont des tores ou des anneaux. Par hypothèse, chaque composante de $\partial U(T \cup \tilde{\tau}(T))$ est donc inessentielle ou parallèle à une composante de ∂M .

Affirmation. Les composantes de $\overline{M - U(T \cup \tilde{\tau}(T))}$ peuvent toutes être munies d'un paramétrage de l'un des trois types suivants :

a) $(S^1 \times D^e, S^1 \times k) \longrightarrow (M, \partial M)$ où k est, soit vide, soit un segment dans ∂D^e .

b) $(D^e \times I, D^e \times \{-1, +1\}) \longrightarrow (M, \partial M)$

c) $(S^1 \times S^1 \times I, S^1 \times S^1 \times \{1\}) \longrightarrow (M, \partial M)$

Démonstration: Soit V une composante de $\overline{M - U(T \cup \tilde{\tau}(T))}$. Elle est incluse dans une sous-variété de M de type a), b) ou c). En effet, si tel n'était pas le cas, $\overline{M - V}$ serait réunion disjointe de sous-variétés de M de type a), b) ou c) puisque les composantes de $\overline{\partial V - \partial M}$ sont inessentielles ou parallèles à une composante de ∂M . Mais alors, T , qui est inclus dans $\overline{M - V}$, ne pourrait être essentiel et non parallèle à une composante de ∂M .

Sans ces conditions, on déduit aisément de la connexité de $T \cup \tilde{\tau}(T)$ que $V \cap \partial U(T \cup \tilde{\tau}(T))$ est connexe.

Si V est inclus dans une sous-variété de M qui est de type b), $\overline{\partial V - \partial M}$ est un tore ou un anneau et donc V est de type b) ou de type a) avec $k = \emptyset$.

Si V est inclus dans une sous-variété de type a) ou c), $V \cap \partial M$ est connexe puisque $V \cap \partial U(TU\tilde{\zeta}(T))$ et l'intersection de ∂M avec cette composante sont connexes. Si $V \cap \partial M$ est vide, alors ∂V est un tore et V est de type a) avec $k_0 = \emptyset$.

Si V est inclus dans une sous-variété de type c) et $V \cap \partial M$ est une composante de ∂V , alors l'autre composante de ∂V est un tore et V est de type c).

Enfin, si V est inclus dans une composante de type a) ou c) et si $V \cap \partial M$ est un anneau, alors $\overline{\partial V - \partial M}$ est un anneau parallèle vers le bord et V_2 est de type a), ce qui achève la démonstration de l'affirmation. \square

Si T est découpé en anneaux par $T \cap \tilde{\zeta}(T)$, toutes les composantes de $\overline{M - U(TU\tilde{\zeta}(T))}$ sont de type a) ou c). La sous-variété $\overline{M - U(TU\tilde{\zeta}(T))}$ peut donc être munie d'une structure de S -variété dont les fibres dans $\partial U(TU\tilde{\zeta}(T))$ sont homologues aux composantes de $T \cap \tilde{\zeta}(T)$ dans $U(TU\tilde{\zeta}(T))$. Soit T_1 l'adhérence d'une composante de $T - (T \cap \tilde{\zeta}(T))$. Grâce aux lemmes 1.20 et 1.23, on peut choisir la structure de S -variété de sorte que $\overline{M - U(TU\tilde{\zeta}(T))} \cap U(T_1U\tilde{\zeta}(T_1))$ soit verticale. D'après la proposition 2.2, $\overline{M - U(TU\tilde{\zeta}(T))} \cup U(T_1U\tilde{\zeta}(T_1))$ est une S -variété. En répétant le procédé, on obtient ainsi que M est une S -variété.

Si T est découpé en carrés par $T \cap \tilde{\zeta}(T)$, toutes les composantes de $\overline{M - U(TU\tilde{\zeta}(T))}$ sont de type b). Le même raisonnement que ci-dessus montre que l'on peut munir M d'une structure de I -fibré sur une surface fermée pour laquelle $\tilde{\zeta}$ est fibrée. La démonstration du lemme 3.1 est ainsi achevée. \square

COROLLAIRE 3.2. $\forall M$ n'admet pas une fibration de Peifert $\varphi: M \rightarrow F$ correspondant à l'un des deux cas a) et b) ci-dessous et si M possède un anneau essentiel ou un tore essentiel non parallèle à une composante du bord, il existe dans M une surface équivariante essentielle dont les composantes sont des anneaux ou des tores non parallèles à une composante du bord.

- a) F est la sphère S^2 , τ est fibrée et induit une involution orientée sur F et φ a exactement quatre fibres exceptionnelles dont deux sont stables par τ .
- b) F est l'espace projectif \mathbb{P}^2 , φ a exactement deux fibres exceptionnelles, τ est fibrée et l'image dans F d'une fibre exceptionnelle est un point fixe isolé de τ .

Démonstration: $\forall M$ n'admet pas une telle surface équivariante essentielle, le lemme 3.1 affirme que l'on peut munir M d'une structure de fibré de Peifert ou de I -fibré pour laquelle τ est fibrée. La démonstration du lemme 3.1 montre en outre que M possède un anneau ou un tore vertical essentiel non parallèle à une composante du bord (à savoir le tore ou l'anneau T).

$\forall M$ est une S -variété, le corollaire 1.39 affirme qu'il existe une surface équivariante du type cherché si M n'appartient pas à une certaine liste exceptionnelle. On vérifie alors que les S -variétés de type a) et b) sont les seules S -variétés de cette liste à posséder un anneau ou un tore vertical essentiel et non parallèle à une composante du bord.

$\forall M$ est un I -fibré sur la surface fermée F et si τ est fibrée, le lemme 1.38 montre que il existe une surface équivariante du type cherché si F est différent de S^2 et de \mathbb{P}^2 . Mais F ne peut être S^2 ou \mathbb{P}^2 puisqu'il existe un anneau vertical essentiel. □

B. Liaison entre la variété caractéristique et la variété équivariamment caractéristique.

Sans ce paragraphe, on suppose de nouveau la variété M fermée.

LEMME 3.3. Soit V la variété ^{équivariamment} caractéristique de M . Dans la sous-variété $\overline{M-V}$, soit T une surface équivariante essentielle dont les composantes sont des anneaux ou des tores. Alors tout tore de T est parallèle dans $\overline{M-V}$ à une composante de ∂V , et toute composante de $\overline{M-V}$ contenant un anneau de T est isomorphe à $S^1 \times S^1 \times I$.

Démonstration: Soit T' la réunion des composantes connexes de $\partial U(V)$ qui intersectent T et soit V' un "petit" voisinage régulier de $T' \cup (T - \overset{\circ}{U}(V))$ (sur l'exemple de la figure 1, V' est représenté par la partie hachurée). Les lemmes 1.28, 1.29

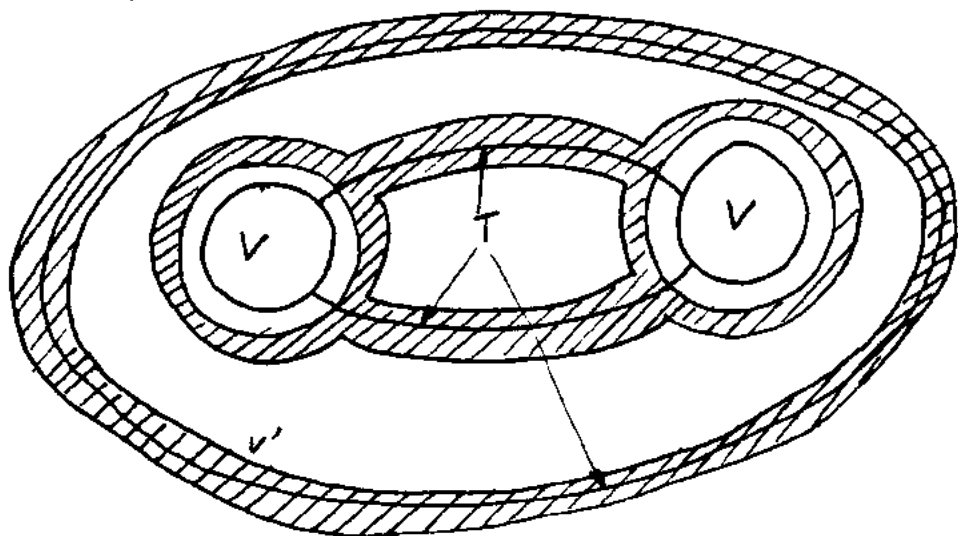


figure 1 .

et 2.2 permettent de munir V' d'une structure de S -variété. Soit V_1 une S -variété équivariamment pleine obtenue comme à la scholie 2.1 en rajoutant à $V \cup V'$ des composantes de $\overline{M - V \cup V'}$. La complexité de V étant supérieure ou égale à celle de V_1 , les composantes de $\partial V \cap V_1$ sont parallèles à des

composantes du bord dans V_1 . Puisque V est équivariamment plaire, on en déduit aisément que $\overline{V_1 - V}$ est un voisinage régulier de $(\partial V_1 - \partial V)$ dans V_1 . Comme les tores de T sont inclus dans $\overline{V_1 - V}$, on en déduit que chacun d'entre eux est parallèle à une composante de ∂V dans $\overline{V_1 - V}$, et donc dans $\overline{M - V}$. Si T_1 est un anneau de T , chaque composante de $\partial V'$ intersectant T_1 est une composante de $\partial U(V)$. Chaque composante de $\overline{V_1 - V}$ intersectant T_1 est donc une composante de $\partial U(V)$ ou de ∂V . Or, la composante de $\overline{V_1 - V}$ qui contient T_1 est isomorphe à $S^1 \times S^1 \times I$. L'anneau T_1 étant essentiel, il intersecte les deux composantes de son bord, ce qui entraîne que la composante de $\overline{M - V}$ contenant T_1 est isotopie à la composante de $\overline{V_1 - V}$ intersectant T_1 , et donc isomorphe à $S^1 \times S^1 \times I$. \square

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème principal de ce chapitre.

THEOREME 3.4. Soit V la variété équivariamment caractéristique de M et soit V' la sous-variété de M obtenue en retirant de V les composantes de V qui sont isomorphes à $S^1 \times S^1 \times I$, stables par τ qui échange les deux composantes de leur bord et encadrées par deux composantes de $\overline{M - V}$ elles aussi isomorphes à $S^1 \times S^1 \times I$. Alors, si M et τ ne correspondent pas à l'un des cas exceptionnels (i) à (iii) dessous, V' est la variété caractéristique de M .

- (i) M admet une fibration de Seifert de base S^2 et d'au plus trois fibres exceptionnelles, ou une fibration de Seifert de base \mathbb{P}^2 et d'au plus une fibre exceptionnelle.
- (ii) M est la variété de Seifert $(-1, 0 | -1; (2, 1), (2, 1))$ et il existe un tore vertical stable par τ qui sépare M en deux sous-variétés isomorphes au S^1 -fibré sur le ruban de Moebius et

échangées par τ .

(iii) M admet une fibration localement triviale de base S^1 et de fibre $S^1 \times S^1$ pour laquelle τ est fibrée

(Les cas (ii) et (iii) feront l'objet des propositions 3.5 et 3.6.)

Démonstration: Soit W une sous-variété de M qui est une variété de Peifert telle que ∂W soit essentiel dans M . Déformons W de façon que le nombre de composantes de $\partial W \cap \partial V$ soit minimum. L'intersection de ∂W avec ∂V est alors s -minimale, et le lemme 1.10 montre que $(\overline{M-V}) \cap \partial W$ est incompressible dans $\overline{M-V}$. Si une composante de $(\overline{M-V}) \cap \partial W$ est compressible dans $\overline{M-V}$, le lemme (1.10) de [Wa 1] affirme que c'est un anneau parallèle vers le bord, ce qui est contradictoire avec la s -minimalité de l'intersection de ∂W avec ∂V . D'autre part, le raisonnement habituel montre que $\partial V \cap \partial W$ est essentielle dans ∂W . Les composantes de $(\overline{M-V}) \cap \partial W$ sont donc des anneaux ou des tores essentiels dans $\overline{M-V}$. Le même raisonnement permet de montrer que $V \cap \partial W$ est formée d'anneaux et de tores essentiels dans V , et que l'on a les mêmes résultats si l'on échange les rôles de V et W . Enfin, on supposera W déformé de telle sorte qu'en outre aucune composante de $(\overline{M-V'}) \cap \partial W$ ne soit parallèle à une composante du bord dans $\overline{M-V'}$, et que le nombre de composantes de $\overline{W-V'}$ soit minimum (pour les déformations de W vérifiant les conditions imposées précédemment).

Si $(\overline{M-V}) \cap \partial W$ est non vide et si V_1 est la réunion des composantes de $\overline{M-V}$ intersectant $\partial W \cup \tau(\partial W)$, le corollaire 3.2 montre qu'il existe dans V_1 une surface équivariante essentielle

qui rencontre toutes les composantes de V_1 et dont les composantes sont des anneaux ou des bords non parallèles à une composante du bord. Le lemme 3.3 affirme alors que les composantes de V_1 sont toutes isomorphes à $S^1 \times S^1 \times I$. Soit A une composante de $\overline{(M-V')} \cap \partial W$. D'après ce qui précède, la composante de $\overline{M-V'}$ contenant A est isomorphe à $S^1 \times S^1 \times I$ et A est un anneau essentiel dans $\overline{M-V'}$, puisqu'on a supposé qu'aucune composante de $\overline{(M-V')} \cap \partial W$ n'est parallèle à une composante du bord dans $\overline{(M-V')}$. Soient V_2 et V_3 les composantes (éventuellement égales) de V' intersectant ∂A . La version non équivariante du corollaire 1.40 fournit une fibration de Seifert p sur $V_2 \cup V_3$ pour laquelle $(V_2 \cup V_3) \cap \partial W$ est verticale. Soit p' une fibration de Seifert sur V' pour laquelle la restriction de τ à V' est fibrée.

Supposons d'abord que $(V_2 \cup V_3) \cap \tau(V_2 \cup V_3)$ soit vide. On peut alors modifier p' de sorte qu'elle coïncide avec p sur $V_2 \cup V_3$. La composante V_4 de $\overline{M-V'}$ contenant A est isomorphe à $S^1 \times S^1 \times I$ et ∂A est verticale pour p' . Les fibres des restrictions respectives de p' à chaque composante de ∂V_4 sont donc homologues dans V_4 . La proposition 2.2 affirme alors que $V \cup V_4 \cup \tau(V_4)$ est une S -variété, ce qui contredit le fait que V soit équivariamment pleine.

Si $\tau(V_2) = V_2$ et si V_2 n'est isomorphe ni à $S^1 \times S^1 \times I$, ni au S^1 -fibré sur le ruban de Moebius, l'unicité à isotopie près de la fibration de Seifert sur V_2 assure que les restrictions de p et p' à V_2 sont isotopes. Si V_2 est isomorphe au S^1 -fibré sur le ruban de Moebius, ou si V_2 est isomorphe à $S^1 \times S^1 \times I$ et τ n'échange pas les composantes de son bord, les lemmes 1.32 et 1.29 permettent de modifier p' sur V_2 de sorte que p et p' soient isotopes. Enfin, si V_2 est isomorphe à $S^1 \times S^1 \times I$ et si

τ échange les deux composantes de ∂V_2 , cette situation ne peut avoir lieu, par définition de V' , que si $V_3 = V_2$ (ce qui entraîne que $\tau(V_4) = V_4$); l'application du lemme 1.29 à V_2 et V_4 montre alors que l'on est dans le cas (iii), ce qui est exclu. Dans tous les cas, on peut ainsi faire en sorte que les restrictions de f et f' à V_2 soient isotopes. Si $\tau(V_3) = V_3$, on peut procéder de même sur V_3 et si $\tau(V_3) \neq V_3$ on peut modifier f' sur $V_3 \cup \tau(V_3)$ de façon que sa restriction à V_3 coïncide avec celle de f' . En définitive, on a ainsi pu modifier f' dans le cas où $\tau(V_2) = V_2$ de sorte que sa restriction à $V_2 \cup V_3$ soit isotope à f . Le même raisonnement que précédemment montre que ceci est contradictoire avec le fait que V est équivariamment pleine.

Il reste maintenant à examiner le cas où $\tau(V_2) = V_3$. Si V_2 n'est isomorphe ni à $S^1 \times S^1 \times I$ ni au S^1 -fibré sur le ruban de Moebius, l'unicité à isotopie près de la fibration de Peifert sur $V_2 \cup V_3$ entraîne que la restriction de f' à $V_2 \cup V_3$ est isotope à f , ce qui contredit comme précédemment le fait que V soit équivariamment pleine. Si V_2 est isomorphe au S^1 -fibré sur le ruban de Moebius, choisissons f' de sorte qu'elle coïncide avec f sur V_2 ; les restrictions de f et f' ne sont alors pas isotopes sur V_3 car ceci contredirait le fait que V est équivariamment pleine; ceci entraîne que si f induit sur V_3 une structure de S^1 -fibré de base le ruban de Moebius, la fibration induite par f' est de type Q , et inversement; on en déduit alors aisément que l'on est dans le cas (ii) exclu. Si V_2 est isomorphe à $S^1 \times S^1 \times I$, et $\tau(V_4) = V_4$, $V_2 \cup V_4 \cup V_3$ est une sous-variété invariante par τ et isomorphe à $S^1 \times S^1 \times I$ (sauf si $V_3 = V_2$, mais ce cas a déjà été étudié) que l'on peut munir d'une structure de S^1 -variété, ce qui est exclu puisque V est

équivariamment pleure. Si V_2 est isomorphe à $S^1 \times S^1 \times I$ et $\bar{\zeta}(V_4) \neq V_4$, la variété M est réunion de V_2, V_4, V_3 et $\bar{\zeta}(V_4)$, et on vérifie alors aisément que l'on est dans le cas exclu (iii).

Nous avons ainsi montré que $(M-V) \cap \partial W$ est vide, ce qui revient à dire que ∂W est inclus dans V .

Supposons que W ne soit pas inclus dans V' . Soit W_1 l'une des composantes de $\overline{W-V'}$. La sous-variété W peut être munie d'une fibration de Peifert p pour laquelle $W \cap \partial V'$ est verticale, ce qui entraîne que W_1 est une variété de Peifert, différente de $S^1 \times D^2$ puisque $\partial V'$ est essentiel. Il existe donc dans W_1 un anneau essentiel ou un tore essentiel non parallèle à une composante du bord (ceci est assuré quand $\partial W_1 \neq \emptyset$ par l'exclusion du cas (i)). La combinaison du corollaire 3.2 et du lemme 3.3 permet alors de montrer comme précédemment que W_1 est isomorphe à $S^1 \times S^1 \times I$. Soient W_2 et W_3 les composantes de $V' \cap W$ intersectant W_1 (avec éventuellement $W_2 = W_3$). La variété W_2 est différente de $S^1 \times D^2$ puisque $\partial V'$ est essentiel et si W_2 est isomorphe à $S^1 \times S^1 \times I$, W_2 est une composante de V' car on pourrait sinon construire une déformation de W qui diminue le nombre de composantes de $\overline{W-V'}$, ce qui est exclu. On a les mêmes propriétés pour W_3 . Soit p' une fibration de Peifert sur V' pour laquelle $\bar{\zeta}$ est fibrée. D'après la version non équivariante de la proposition 1.37, il existe une fibration de Peifert p'' sur V' , isotope à p' et pour laquelle ∂W est verticale (mais $\bar{\zeta}$ n'est pas forcément fibrée pour p''). Rappelons que l'on a muni W d'une fibration de Peifert p pour laquelle $W \cap \partial V$ est verticale.

Si W_2 et W_3 ne sont isomorphes ni à $S^1 \times S^1 \times I$, ni au S^1 -fibré sur le ruban de Moebius, l'unicité à isotopie près de la fibration de Seifert sur $W_2 \cup W_3$ montre que les restrictions à $W_2 \cup W_3$ de f et f'' sont isotopes. En particulier, la restriction de f à ∂W_1 est isotope à celle de f'' , et donc de f' . On peut alors appliquer la proposition 2.2 pour montrer que $V \cup W_1 \cup \tau(W_1)$ est une S -variété, ce qui est exclu puisque V est équivariamment pleine (W_1 est une composante de $\overline{W-V}$, et donc de $\overline{M-V}$ puisque $\partial W \subset V$).

Si W_2 est isomorphe à $S^1 \times S^1 \times I$, nous avons vu que W_2 est une composante de V' . Si $\tau(W_2) \cap (W_2 \cup W_3)$ est vide, on peut modifier f' sur $W_2 \cup \tau(W_2)$ de sorte que les fibres respectives des restrictions de f' à chaque composante de ∂W_1 soient homologues dans W_1 , ce qui permettrait d'appliquer la proposition 2.2 pour munir $V \cup W_1 \cup \tau(W_1)$ d'une structure de S -variété, ce qui est exclu. Si $\tau(W_2) = W_2$ et τ échange les deux composantes de ∂W_2 , ce qui, par définition de V' , ne peut avoir lieu que si $W_2 = W_3$ et $\tau(W_1) = W_1$, l'application du lemme 1.29 à W_1 et W_2 montre que l'on est dans le cas exclu (iii). Si $\tau(W_2) = W_2$ et τ n'échange pas les deux composantes de W_2 , W_3 est différent de W_2 car on se trouverait sinon dans le cas (iii); on peut donc modifier la restriction de f' à W_2 de façon que les fibres respectives des restrictions de f' à chaque composante de ∂W_1 soient homologues dans W_1 , ce qui contredirait le fait que V soit équivariamment pleine. Enfin, si $W_3 \subset \tau(W_2)$, $\tau(W_1) = W_1$ car sinon M serait égal à $W_2 \cup W_1 \cup \tau(W_2) \cup \tau(W_1)$ et l'on serait dans le cas (iii); mais alors, ou bien $W_2 \cup W_1 \cup \tau(W_2)$ est isomorphe à $S^1 \times S^1 \times I$, ce qui permet de contredire le fait que V soit équivariamment pleine, ou bien $W_2 = \tau(W_2)$ et l'on est ramené au cas précédent.

Nous avons ainsi montré que W_2 ne peut être isomorphe à $S^1 \times S^1 \times I$. Il en est de même pour W_3 .

Il reste maintenant à étudier le cas où W_2 est isomorphe au S^1 -fibré sur le ruban de Moebius et où W_3 n'est pas isomorphe à $S^1 \times S^1 \times I$. Si $W_3 \cap \bar{\tau}(W_2)$ est vide, le lemme 1.32 et l'unicité de la fibration de Seifert sur W_3 si W_3 n'est pas isomorphe au S^1 -fibré sur le ruban de Moebius permettent de modifier π' (et π'') de sorte que les restrictions de π et π'' à $W_2 \cup W_3$ soient isotopes; on pourrait alors munir $V \cup W_1 \cup \bar{\tau}(W_1)$ d'une structure de S -variété, ce qui est exclu. Si $W_3 \subset \bar{\tau}(W_2)$, alors $W_3 = \bar{\tau}(W_2)$ car $\bar{\tau}(W_2)$ ne contient pas de tore essentiel non parallèle au bord, ce qui entraîne que $W = M$ et $V' = W_2 \cup W_3$; on peut choisir π' de sorte qu'elle coïncide avec π sur W_2 et alors, en bien les restrictions de π et π' à W_3 sont isotopes, ce qui contredit le fait que V soit équivariamment pleine, ou bien elles ne sont pas isotopes et on vérifie aisément que l'on est dans le cas (ii), lequel est exclu.

Nous avons ainsi épuisé tous les cas possibles, et abouti chaque fois à une contradiction, ce qui montre que $\overline{W-V}$ est vide. Toute sous-variété de M qui est une variété de Seifert et dont le bord est essentiel peut donc être amenée à l'intérieur de V' par une isotopie.

Il reste maintenant à montrer que V' est pleine. Soit W une réunion de composantes de $\overline{M-V}$ telle que $V' \cup W$ soit une variété de Seifert. Le raisonnement maintenant habituel montre que chaque composante de W possède un anneau essentiel ou, si $V' = \partial W = \emptyset$, un tore essentiel et est donc isomorphe à $S^1 \times S^1 \times I$.

Quitte à augmenter W , on peut supposer que $V' \cup W$ est pleine.
D'après ce que nous venons de montrer, il existe une déformation
qui amène $V' \cup W$ à l'intérieur de V' ; du corollaire 1.35 et du
fait que $V' \cup W$ est pleine on déduit alors aisément que $V' \cup W$
est de complexité inférieure ou égale à celle de V' . D'autre
part, V' est obtenue en découpant $V' \cup W$ le long de la surface
formée des "âmes" des composantes de W , c'est à dire de l'image
de $S^1 \times S^1 \times \{0\}$ par un isomorphisme donné de $S^1 \times S^1 \times I$ avec
chaque composante de W . Puisque $V' \cup W$ est de complexité inférieure
ou égale à celle de V' , on déduit du corollaire 1.35 que toutes
ces âmes sont parallèles à une composante du bord. Chaque
composante de ∂W est donc parallèle dans $V' \cup W$ à une
composante de $(\partial V' - \partial W)$.

Soit W_1 une composante de W et soit w_1 une composante de ∂W_1 .
D'après ce qui précède, il existe une sous-variété W'_1 de $V' \cup W$
isomorphe à $S^1 \times S^1 \times I$ telle que $w_1 \subset W'_1$ et $\partial W'_1 - w_1$ soit une
composante de $\partial V' - \partial W$. Quitte à changer w_1 , on peut supposer
que W_1 n'est pas inclus dans W'_1 . Soit V_1 la composante de V'
contenant w_1 et soit V_2 la composante de V' contenant l'autre
composante de ∂W_1 . Puisque V_1 est inclus dans W'_1 qui est
isomorphe à $S^1 \times S^1 \times I$, V_1 est lui aussi isomorphe à $S^1 \times S^1 \times I$.
D'autre part, $\partial W'_1 - w_1$ étant une composante de $\partial V' - \partial W$, V_1 est
différent de V_2 .

Si $\bar{\sigma}(V_1)$ est différent de V_2 , soit π' une filtration de $\bar{\sigma}$ part
sur V' pour laquelle $\bar{\sigma}$ est fibré. Si $\bar{\sigma}(V_1) = V_1$, $\bar{\sigma}$ n'échange
pas les composantes de ∂V_1 . On peut donc modifier π' sur
 $V_1 \cup \bar{\sigma}(V_1)$ de sorte que les fibres respectives de ses restrictions
à chaque composante de ∂W_1 soient homologues dans W_1 , ce

qui contredit le fait que V soit équivariamment pleine.

Si $\bar{\sigma}(V_1) = V_2$, ou bien $W_1 = \bar{\sigma}(W_1)$ et $V_1 \cup W_1 \cup V_2$ est isomorphe à $S^1 \times S^1 \times I$ et stable par $\bar{\sigma}$, ce qui contredit le fait que V soit équivariamment pleine, ou bien M est la réunion de V_1, W_1, V_2 et $\bar{\sigma}(W_1)$ et l'on vérifie alors aisément que l'on est dans le cas exclu (iii).

En définitive, nous avons ainsi montré que W est vide, et donc que V est pleine, ce qui achève la démonstration du théorème 3.4. \square

Étudions maintenant les cas (ii) et (iii) écartés dans le théorème 3.4. Nos méthodes, utilisant l'existence d'un tore essentiel, ne peuvent être appliquées dans le cas (i).

PROPOSITION 3.5. Si M est la variété de Peifert $(-1, 0 | -1; (2, 1), (2, 1))$ et s'il existe un tore vertical T stable par $\bar{\sigma}$ qui sépare M en deux sous-variétés isomorphes au S^1 fibré sur le ruban de Moebius et échangées par $\bar{\sigma}$, la variété caractéristique de M est M tout entier tandis que, si U et U' sont deux voisinages réguliers de T fermés, stables par $\bar{\sigma}$ et tels que $\bar{U} \subset U'$, la variété équivariamment caractéristique de M est $(M - U') \cup U$.

PROPOSITION 3.6. Supposons que M admette une structure de $(S^1 \times S^1)$ -fibré de base S^1 dont $\bar{\sigma}$ envoie fibre sur fibre. Soient un automorphisme φ de $S^1 \times S^1$ et un isomorphisme de M avec $\mathbb{R} \times (S^1 \times S^1) / \nu$, où ν identifie (u, x) avec $(u+1, \varphi(x))$ pour lequel la structure de $(S^1 \times S^1)$ -fibré sur M est l'image du $(S^1 \times S^1)$ -fibré canonique sur $\mathbb{R} \times (S^1 \times S^1)$. Soit φ_* l'automorphisme de $H_1(S^1 \times S^1)$ induit par φ . Alors:

a) La variété M est une variété de Peifert, et donc est égale à

sa variété caractéristique, si et seulement si φ_* est périodique ou admet une valeur propre réelle. Si M n'est pas une variété de Seifert, la variété caractéristique de M est un voisinage régulier d'une fibre du $(S^1 \times S^1)$ -fibré.

b) Si τ inclut l'identité dans la base S^1 du $(S^1 \times S^1)$ -fibré, la variété équivariamment caractéristique est égale à la variété caractéristique de M .

c) Si τ induit l'application antipodale dans S^1 , la variété équivariamment caractéristique est égale à M si M est une variété de Seifert et à un voisinage régulier de deux fibres du $(S^1 \times S^1)$ -fibré échangées par τ si M n'est pas une variété de Seifert.

d) Si τ induit une symétrie dans S^1 , la variété équivariamment caractéristique est égale à M si M est une variété de Seifert et à un voisinage régulier des deux fibres du $(S^1 \times S^1)$ -fibré stables par τ sinon.

Démonstrations: Sous les hypothèses de la proposition 3.5, les résultats de [Wa 9] montrent qu'il n'existe à isotopie près que deux fibrations de Seifert sur M , et que celles-ci peuvent être choisies de sorte que T soit vertical. Dans les deux cas, une fibre de T et son image par τ ne représentent pas le même élément de $\pi_1(T)$, et donc de $\pi_1(M)$ puisque T est essentiel. Il n'existe donc pas sur M de fibration de Seifert pour laquelle τ est fibrée. La S -variété $(M - U') \cup U$ est donc équivariamment pleine. En remarquant qu'il n'existe à isotopie près dans M qu'un seul tore essentiel ne rencontrant pas son image par τ (et que ce tore est parallèle à T), on vérifie aisément que $(M - U') \cup U$ est de complexité maximum parmi les S -variétés équivariamment pleines, ce qui, grâce à la

proposition 2.7, permet de conclure.

Considérons maintenant la proposition 3.6. Si M est une variété de Seifert, la version non équivariante de la proposition 1.37 permet de choisir la fibration de Seifert p sur M de sorte que l'une des fibres T du $(S^1 \times S^1)$ -fibré soit verticale ou que la restriction de p à cette fibre soit une application de revêtement ramifié. Dans le premier cas, φ_* admet un vecteur propre, à savoir l'image dans $H_1(S^1 \times S^1)$ de la fibre de la restriction de p à T . Dans le deuxième cas, la restriction de p à la variété \tilde{M} obtenue en découplant M le long de T définit sur \tilde{M} une structure de I -fibré de base T . On peut déformer φ par une isotopie et modifier le paramètre de M par $\mathbb{R} \times (S^1 \times S^1) / \mathbb{Z}$ de sorte que le I -fibré canonique sur $[0, 1] \times (S^1 \times S^1)$ coïncide avec le I -fibré induit par p sur \tilde{M} . Si la restriction de p à T est un revêtement ramifié à n feuillettes, l'automorphisme φ^n est l'identité, ce qui montre bien que φ_* est périodique.

Réciproquement, si φ_* est périodique ou possède une valeur propre réelle, on peut choisir φ , en le "linéarisant" de sorte qu'il soit périodique ou laisse stable une courbe de $S^1 \times S^1$. On peut alors aisément munir M d'une fibration de Seifert.

Si M n'est pas une variété de Seifert, soit U un voisinage régulier de l'une des fibres du $(S^1 \times S^1)$ -fibré. La sous-variété U est une variété de Seifert, est pleine et son bord est essentiel. D'autre part, son complémentaire est isomorphe à $S^1 \times S^1 \times I$. Elle est donc complète, et est donc la variété caractéristique de M (voir [Ja 1]).

Il reste maintenant à étudier la variété équivariamment caractéristique. Nous laisserons au lecteur le soin de vérifier que si M tout entier n'est pas une variété de Peifert, la variété équivariamment caractéristique est bien celle annoncée. Nous supposons donc désormais que M est une variété de Peifert. On veut montrer qu'il existe une fibration de Peifert pour laquelle τ est fibrée.

À l'aide du lemme 1.23, on peut choisir φ de sorte qu'il existe un automorphisme α de \mathbb{R} et un automorphisme β de $S^1 \times S^1$ tels que τ soit l'image de l'automorphisme $\alpha \times \beta$ de $\mathbb{R} \times (S^1 \times S^1)$ et ou bien $\alpha(u) = u$, β est une involution et $\varphi \circ \beta = \beta \circ \varphi$, ou bien $\alpha(u) = u + \frac{1}{2}$ et $\varphi = \beta^2$, ou bien enfin $\alpha(u) = 1 - u$, β est une involution et $\varphi \circ \beta = \beta \circ \varphi^{-1}$. Les mêmes méthodes qu'au lemme 1.23 permettent de faire en sorte que φ et β soient "linéaires", c'est à dire image par l'application $(x, y) \mapsto (e^{2\pi i x}, e^{2\pi i y})$ d'une application affine de \mathbb{R}^2 envoyant $(0, 0)$ sur un élément de $(\frac{1}{2}\mathbb{Z})^2$.

Si φ_* est périodique, il en est alors de même de φ et la structure canonique de \mathbb{R} -fibré de $\mathbb{R} \times (S^1 \times S^1)$ induit sur M une fibration de Peifert pour laquelle τ est fibrée. Nous supposons donc désormais que φ_* admet un vecteur propre, et donc que φ conserve une structure de S^1 -fibré sur $S^1 \times S^1$. La variété M peut alors être munie d'une fibration de Peifert p pour laquelle les fibres du $(S^1 \times S^1)$ -fibré induit par le $(S^1 \times S^1)$ -fibré canonique sur $\mathbb{R} \times (S^1 \times S^1)$ soient verticales.

Si τ induit l'identité dans la base S^1 du $(S^1 \times S^1)$ -fibré sur M , soit T l'un de ces fibres. La sous-variété $\overline{M - \cup(T)}$ est isomorphe à $S^1 \times S^1 \times I$ et stable par τ qui n'échange pas les

composantes de son bord. D'après le lemme 1.29, il existe donc une structure de S^1 -fibré isotope à la restriction de p à $\overline{M-4(T)}$ pour laquelle τ envoie fibre sur fibre. La proposition 2.2 permet alors de munir M tout entier d'une structure de S -variété.

Si τ induit dans S^1 l'application antipodale, nous avons vu que $\varphi = \beta^2$. Soit β_* l'automorphisme de $H_1(S^1 \times S^1)$ induit par β . Un calcul simple dans $GL_2(\mathbb{Z})$ montre que, si φ_* admet un vecteur propre, φ_* est périodique ou bien possède un vecteur propre commun avec β_* . Le premier cas a déjà été étudié. Supposons donc que φ et β envoient $S^1 \times \{*\}$ sur une courbe homologue. Puisque φ et β ont été linéarisés, la fibration de $\mathbb{R} \times S^1 \times S^1$ par les courbes $\{*\} \times S^1 \times \{*\}$ induit une fibration de M pour laquelle τ est fibrée.

Si τ induit une symétrie dans S^1 , soit T l'une des deux fibres du $(S^1 \times S^1)$ -fibré stable par τ . A isotopie près, il existe sur $\overline{M-4(T)}$ exactement deux structures de S^1 -fibrés dont τ envoie fibre sur fibre, dont les fibres respectives correspondent aux vecteurs propres de l'application β_* de $H_1(S^1 \times S^1)$. De $\varphi_* \circ \beta_* = \beta_* \circ \varphi_*^{-1}$, on déduit que tout vecteur propre de φ_* est envoyé par β_* sur un autre vecteur propre de φ_* . Or, si φ_* n'est pas périodique, φ_* possède une unique droite de vecteurs propres. Les deux applications φ_* et β_* ont donc un vecteur propre en commun. La proposition 2.2 permet alors de munir M d'une structure de S -variété. \square

En le combinant avec le théorème 2.6 et en utilisant la proposition 3.6 pour éliminer certains cas exceptionnels, on peut exprimer le théorème 3.4 sans faire intervenir

la notion de variété équivariamment caractéristique de la façon suivante.

THEOREME 3.7. Si M et τ ne correspondent pas à l'un des cas exceptionnels (i) et (ii) du théorème 3.4, et si V_c est la variété caractéristique de M , il existe une isotopie Ψ et une fibration de Seifert p sur $\Psi(V_c)$ telles que $\Psi(V_c)$ soit stable par τ et que la restriction de τ à $\Psi(V_c)$ soit fibrée pour p . En outre, si Φ et Ψ sont deux telles isotopies, il existe une isotopie équivariante qui envoie $\Phi(V_c)$ sur $\Psi(V_c)$.

Chapitre IV
INVOLUTIONS SUR LES VARIÉTÉS
DE SEIFERT.

Dans tout ce chapitre, M désignera une variété de Seifert éventuellement avec bord muni d'une involution orientée τ .

A. Involution et fibrations de Seifert.

Soit π une fibration de Seifert sur M . Les involutions fibrées étant en général plus facile à manier, on est amené à se demander s'il existe une fibration isotopé à π pour laquelle τ est fibrée. Le corollaire suivant du théorème 3.4 montre que ceci est en général vrai.

THEOREME 4.1. Soit M une variété de Seifert munie d'une involution τ . Si M et τ ne correspondent pas à l'un des cas exceptionnels ci-dessous, il existe une fibration de Seifert sur M pour laquelle τ est fibrée.

- (i) M admet une fibration de Seifert de base S^2 à au plus trois fibres exceptionnelles, ou une fibration de base \mathbb{P}^2 à au plus une fibre exceptionnelle.
- (ii) M est la variété de Seifert $(-1, 0 | -1; (2, 1), (2, 1))$ et il existe un tore vertical essentiel stable par τ qui sépare M en deux composantes isomorphes au S^1 -fibré sur le ruban de Moebius et échangées par τ .

Démonstration : Si M est sans bord, sa variété caractéristique est M tout entière et le théorème 3.4 fournit la conclusion cherchée.

Si le bord de M est non vide, soit F la surface orientable de genre 2 à bord connexe non vide. On peut obtenir une variété de Peifert sans bord M' en recollant sur M un exemplaire de $F \times S^1$ le long de chaque composante de ∂M . Grâce au corollaire 1.18, on peut choisir ces recolllements de sorte que τ s'étende en une involution τ' de M' . D'après ce qui précède, M' peut être munie d'une fibration π pour laquelle τ' est fibrée. Si M n'est pas isomorphe à $S^1 \times D^2$ (ce que l'on peut toujours supposer puisque ce cas a déjà été étudié au lemme 1.27), la proposition 1.37 permet de choisir π de sorte que la surface équivariante essentielle ∂M soit verticale, ou bien que la restriction de π à ∂M soit une application de revêtement ramifié. Mais cette dernière éventualité est à exclure puisque le genre de la base de π est au moins égal à celui de F , c'est à dire 2. Puisque ∂M est verticale pour π , la restriction de π à M fournit la fibration cherchée. \square

Remarques.

1) A posteriori, le théorème 4.1 montre que, dans la définition d'une S -variété, la condition imposant à la restriction de τ d'être fibrée est en général superflue.

2) Il est faux que toute fibration de Peifert sur M soit isotopie à une fibration pour laquelle τ est fibrée (sauf bien sûr si M n'admet à isotopie près qu'une fibration de Peifert). Nous avons déjà vu l'exemple des involutions de $S^1 \times S^1 \times \mathbb{I}$

échangeant les composantes du bord. En voici un autre : Soient M la variété $\mathbb{R} \times S^1 \times S^1 / \nu$, où ν identifie (u, z, z') et $(u+1, \bar{z}, \bar{z}')$, et τ l'involution de M image de l'application qui associe $(u+\frac{1}{2}, z', \bar{z})$ à $(u, z, z') \in \mathbb{R} \times S^1 \times S^1$. L'involution τ est fibrée pour la fibration dont les fibres sont les images des $\mathbb{R} \times \{*\} \times \{*\}$. Mais M admet aussi une fibration de Seifert sur la bouteille de Klein dont τ envoie les fibres $\{*\} \times S^1 \times \{*\}$ sur $\{*\} \times \{*\} \times S^1$. Or, ces deux courbes ne sont pas homologues dans M et il n'existe donc pas de fibration isotope à celle-ci pour laquelle τ soit fibrée.

B. Equivalences entre involutions fibrées.

Soient M et M' deux variétés respectivement munies d'involutions τ et τ' . On dira que τ et τ' sont équivalentes s'il existe un isomorphisme équivariant entre M et M' , c'est à dire un isomorphisme φ de M sur M' tel que

$$\varphi \circ \tau = \tau' \circ \varphi.$$

THEOREME 4.2. Soient M et M' deux variétés de Seifert respectivement munies de fibrations de Seifert f et f' et d'involutions τ et τ' . Soit φ un isomorphisme équivariant de M sur M' . Si l'image par φ de la fibre générale de f est homotope à la fibre générale de f' (ce qui est en particulier toujours vrai si M ou M' n'admet qu'une seule fibration de Seifert à isotopie près), et si aucune des conditions

(i) et (ii) ci-dessous n'est réalisée, on peut équivariamment déformer φ de sorte qu'il envoie les fibres de f sur celles de f' .

(i) f' est une fibration de base la sphère S^2 et possède

au plus trois fibres exceptionnelles ou est une fibration de base l'espace projectif \mathbb{P}^2 et possède au plus une fibre exceptionnelle

(ii) f est une fibration de base S^2 à 4 fibres exceptionnelles dont deux sont les seules fibres laissées stables par τ ou bien une fibration de base \mathbb{P}^2 à 2 fibres exceptionnelles dont l'une est une fibre stable isotopée pour τ .

En outre, si la restriction de φ à ∂M est fibrée, on peut imposer à la déformation équivariante de ne pas modifier cette restriction.

Pour démontrer le théorème 4.2, nous aurons besoin du résultat suivant.

LEMME 4.3. Sur $S^1 \times D^2$ muni d'une involution τ , soit φ un automorphisme équivariant égal à l'identité sur le bord. Alors φ est équivariamment isotopé à l'identité par une isotopie fixant le bord.

Démonstration: L'automorphisme φ induit un automorphisme $\bar{\varphi}$ du quotient $S^1 \times D^2 / \tau$ qui, d'après le lemme 1.27, est un tore plein dans lequel l'image des points fixes de τ est vide ou est l'âme du tore, ou bien une boucle dans laquelle l'image des points fixes de τ est formée de deux segments non noués et non enlacés. L'automorphisme $\bar{\varphi}$ est égal à l'identité sur le bord. Il est alors bien connu que $\bar{\varphi}$ est isotopé à l'identité par une isotopie égale à l'identité sur le bord et préservant l'image des points fixes de τ (si ceci n'est pas bien connu, il suffit de remarquer que tout automorphisme de B^3 égal à l'identité sur le bord est isotopé à l'identité par une isotopie fixant le bord). On

obtient le résultat cherché en relevant cette isotopie dans $S^1 \times D^2$. \square

LEMME 4.4. Sur $S^1 \times S^1$ muni d'une structure de S^1 -fibré π et d'une involution fibrée conservant l'orientation, soit φ un automorphisme équivariant fibré qui est équivariamment isotope à l'identité. Alors φ est isotope à l'identité par une isotopie équivariante fibrée.

Démonstration : φ $\bar{\tau}$ induit l'identité dans $H_1(S^1 \times S^1)$, le quotient $S^1 \times S^1 / \bar{\tau}$ est encore un tore et π induit une structure de S^1 -fibré, d'après le corollaire 1.19. Il suffit alors de relever une isotopie convenable de $S^1 \times S^1 / \bar{\tau}$.

Enfin, il existe dans $S^1 \times S^1$ un anneau A tel que :

a) chaque composante de ∂A intersecte transversalement chaque fibre en exactement un point.

b) $S^1 \times S^1 = A \cup \bar{\tau}(A)$ et $\overset{\circ}{A} \cap \bar{\tau}(A) = \emptyset$.

Il suffit alors de reprendre point par point la démonstration du lemme 1.21 (et donc aussi du lemme 1.19) pour vérifier la propriété annoncée. \square

Démonstration du théorème 4.2 : Le lemme 1.21, joint au lemme 1.29, permet de déformer équivariamment φ au voisinage du bord de sorte que sa restriction à ∂M soit fibrée. On suppose donc qu'il en est toujours ainsi. La démonstration s'effectue par récurrence sur la complexité de M .

Étudions d'abord le cas où M est isomorphe à $S^1 \times D^2$. Si $\bar{\tau}$ induit l'identité dans $\Pi_1(M) = \mathbb{Z}$, le lemme 1.31 montre que π définit une fibration de Seifert sur le quotient

M/τ . De même pour M'/τ' . D'autre part, si $\tilde{\varphi}$ est l'application de M/τ dans M'/τ' induite par τ , $\tilde{\varphi}$ est fibrée sur le bord et peut être déformée en un automorphisme fibré, d'après la classification des fibrations de Lefschetz sur la tore plein. On obtient le résultat annoncé en relevant cette isotopie de $\tilde{\varphi}$.

Si τ induit dans $\pi_1(M) = \mathbb{Z}$ l'homothétie de rapport -1 , le lemme 1.31 fournit un paramétrage de M par $S^1 \times D^2$ pour lequel τ s'identifie à l'involution qui à (z, z') associe (\bar{z}, \bar{z}') , et les fibres de p sont paramétrées par les applications

$$u \longmapsto \left(e^{2\pi i(mu+a)}, re^{2\pi i(nu+b)} \right)$$

où $u \in \mathbb{R}$, $r \in [0, 1]$, et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, et où $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ caractérise le type de la fibration. De même pour M' .

Soit $\tilde{\varphi}$ l'automorphisme de $S^1 \times D^2$ défini par φ pour ces identifications, et soit p'' la fibration standard de $S^1 \times D^2$ définie ci-dessus. La restriction de $\tilde{\varphi}$ au bord est fibrée et, quitte à composer le paramétrage de M' par les automorphismes de $S^1 \times D^2$ qui à (z, z') associent $(-z, z')$ et $(z, -z')$, le lemme 1.21 permet de supposer que cette restriction est équivariamment isotopie à l'identité (pour t). Grâce au lemme 4.4, on peut alors encore déformer le paramétrage de M' au voisinage du bord de sorte que $\tilde{\varphi}$ soit l'identité sur $\partial(S^1 \times D^2)$. Le lemme 4.3 achève alors la démonstration dans ce cas.

Si M n'est pas isomorphe à $S^1 \times D^2$, il existe d'après le

corollaire 1.39 une surface T équivariante essentielle et verticale dans M dont aucune composante n'est parallèle à une composante de ∂M . Puisque $\varphi(\partial T)$ est soit vide, soit vertical pour φ' , l'assertion utilisée pour la démonstration de la proposition 1.37 fournit une déformation équivariante de $\varphi(T)$, ce qui équivaut à une déformation équivariante de φ , égale à l'identité sur le bord, après laquelle ou bien $\varphi(T)$ est verticale, ou bien la restriction de φ' à $\varphi(T)$ est une application de revêtement ramifié. En fait, la deuxième hypothèse est à exclure car le nombre d'intersection de $\varphi(T)$ avec une fibre générale de φ' est égal à celui de T avec une fibre générale de φ puisque φ conserve les fibres à homotopie près, et ce dernier nombre d'intersection est nul puisque T est verticale. L'image par φ d'une fibre de la restriction de φ à T et la fibre de la restriction de φ' à $\varphi(T)$ sont homotopes dans M , et donc dans $\varphi(T)$ puisque cette surface est essentielle. Le lemme ^{1.20} fournit alors une déformation équivariante de la restriction de φ à T , que l'on peut étendre à φ tout entier grâce aux lemmes 1.28 et 1.30, après laquelle φ envoie les fibres de la restriction de φ à T sur celles de la restriction de φ' à $\varphi(T)$. En outre, cette déformation équivariante peut être choisie égale à l'identité sur le bord. Soit \tilde{M} (resp. \tilde{M}') la variété obtenue en découpant M (resp. M') le long de T (resp. $\varphi(T)$) et soit $\tilde{\varphi}$ l'application de \tilde{M} dans \tilde{M}' définie par φ . D'après la proposition 1.34, \tilde{M} est de complexité strictement inférieure à celle de M . D'autre part, $\tilde{\varphi}$ est fibrée sur $\partial \tilde{M}$. L'hypothèse de récurrence fournit donc une déformation équivariante de $\tilde{\varphi}$, égale à l'identité

sur le bord, qui rend $\tilde{\varphi}$ fibrée par les fibrations respectivement définies par p et p' sur \tilde{M} et \tilde{M}' . En "recollant" cette déformation, on obtient ainsi la déformation équivariante de φ cherchée. \square

Chapitre V
APPLICATION AUX ENLACEMENTS
DANS S^3 .

Un exemple de variété de dimension 3 munie d'une involution est fourni par le revêtement double ramifié M d'un enlacement K dans S^3 et l'involution de revêtement τ correspondante. Ce chapitre est consacré à la traduction dans l'espace quotient S^3 des résultats obtenus jusqu'ici. Les lettres K , M et τ se référeront toujours à la situation ci-dessus. En outre, nous imposerons à K d'être irréductible, ce qui permettra à M de satisfaire toutes les conditions requises grâce au résultat suivant (voir [To 1], théorème D).

LEMME 5.1. La variété M est irréductible si et seulement si l'enlacement K est irréductible.

Démonstration: Supposons M irréductible et soit \mathcal{P} une sphère intersectant K en 0 ou 2 points et séparant S^3 en deux boules B_1 et B_2 qui rencontrent toutes deux K . Soit S un revêtement de \mathcal{P} dans M . D'après les conditions imposées à \mathcal{P} , la surface S est une sphère qui borde donc une boule B dans M . On peut évidemment se ramener au cas où \dot{B} ne rencontre pas $\tau(S)$ et alors, ou bien B est stable par τ , ou bien $\tau(B) \cap B = \emptyset$. L'image de $B \cup \tau(B)$ dans S^3 est l'adhésion d'une composante de $S^3 - \mathcal{P}$ et est donc l'une des boules B_i . Les résultats de [Wa 3] montrent alors que $B_2 \cap K$ est un segment non naïf dans B_1 . L'enlacement K est donc irréductible.

Réciproquement, si M n'est pas irréductible, il existe une optère S dans M qui ne borde pas une boule dans M . Les méthodes habituelles permettent de choisir S de sorte que $\tau(S) = S$ ou $\tau(S) \cap S = \emptyset$. Soit \mathcal{Y} l'image de $S \cup \tau(S)$ dans S^3 . La surface \mathcal{Y} est une optère rencontrant K en 0 ou 2 points et séparant S^3 en deux boules B_1 et B_2 telles que pour tout $i = 1, 2$, $B_i \cap K$ n'est ni vide, ni un segment non nul dans B_i . L'enlacement K n'est donc pas irréductible. \square

A. \mathcal{Y} -variétés dans S^3 .

Par définition, une \mathcal{Y} -variété sera l'image dans S^3 d'une S -variété de M . Nous voulons obtenir une description de ces sous-variétés de S^3 . Les résultats sont inspirés de [Mo].

LEMME 5.2. Soient $f: M' \rightarrow F$ une fibration de Seifert et τ' une involution fibrée pour f' telle que l'involution $\bar{\tau}'$ induite par τ' dans F admette au moins un cercle de points fixes (et ne soit pas l'identité). Si en outre $M'/\bar{\tau}'$ est isomorphe à S^3 , alors F est de genre négatif ou nul, la surface $F/\bar{\tau}'$ est un disque, toutes les fibres exceptionnelles de f sont situées au-dessus de la composante de dimension 1 de l'ensemble des points fixes de $\bar{\tau}'$ et les points fixes isolés de $\bar{\tau}'$ sont pondérés par 0 et 2.

Démonstration: L'ensemble des points fixes de $\bar{\tau}'$ admet au plus une composante de dimension 1. En effet, on pourrait sinon trouver dans $F/\bar{\tau}'$ un chemin k joignant deux composantes distinctes du bord et dont l'intérieur ne rencontre l'image d'aucun point fixe de $\bar{\tau}'$ ni d'aucun point exceptionnel de f . Alors $f^{-1}(k \cup \bar{\tau}'(k))$ est un tore ou une bouteille de Klein

stable par $\bar{\tau}'$ qui ne sépare pas M' et dont l'image dans $M'/\bar{\tau}'$ est une sphère non séparante, ce qui contredit l'isomorphisme entre $M'/\bar{\tau}'$ et S^3 .

Soit U un voisinage régulier stable par $\bar{\tau}'$ de l'unique composante de dimension 1 de l'ensemble des points fixes de $\bar{\tau}'$, et soit $\tilde{U} = \pi^{-1}(U)$. Puisque la restriction de $\bar{\tau}'$ à $(F - \tilde{U})$ n'admet que des points fixes isolés, π induit sur $(\pi^{-1}(F - \tilde{U}))/\bar{\tau}'$ une filtration de Seifert de base $(F - \tilde{U})/\bar{\tau}'$, qui est isomorphe à $F/\bar{\tau}'$. Or, un résultat classique affirme que toute variété de Seifert plongeable dans S^3 a une base plongeable dans S^2 et au plus deux fibres exceptionnelles. Ceci entraîne que $F/\bar{\tau}'$ est un disque et, d'après les résultats de §4 de [Mo], que l'image dans $F/\bar{\tau}'$ de la réunion de l'ensemble des points exceptionnels de π et de l'ensemble des points fixes isolés de $\bar{\tau}'$ pondérés par $1 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est de cardinal inférieur ou égal à 2. En outre, si ce cardinal est non nul, les résultats de [Mo] montrent que $M'/\bar{\tau}'$ est obtenue à partir de S^3 de la manière suivante : Choisissons dans S^3 deux tores pleins T_1 et T_2 non noués et non enlacés, ainsi qu'une base de $H_1(T_i)$ dont le premier élément soit le bord d'un méridien de T_i , pour $i=1, 2$; alors $M'/\bar{\tau}'$ est obtenue en recollant un tore plein T_i' sur $(S^3 - T_1 \cup T_2)$ le long de ∂T_i pour tout i et, si le bord d'un méridien de T_i' est représenté par $(\alpha_i, \beta_i) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dans la base choisie sur $H_1(T_i)$, au moins l'un des $|\alpha_i|$ est supérieur ou égal à 2. Il suffit alors de calculer le groupe fondamental par le théorème de Van Kampen pour montrer que ceci est impossible. \square

Nous sommes maintenant en mesure de donner "l'allure"

d'une \mathcal{P} -variété. Soit donc V une \mathcal{P} -variété connexe correspondant à la S -variété V dans M . Si τ ne renverse l'orientation d'aucune fibre de V , le quotient V/τ est encore une variété de Seifert. Si V/τ n'est pas munie d'une structure de S^1 -fibré, les composantes de son bord bordent des tores pleins dans son complémentaire et on peut donc aisément étendre la fibration de V/τ en une fibration de Seifert sur S^3 tout entière. Par conséquent, si τ ne renverse l'orientation d'aucune fibre de V , ou bien V est isomorphe à $F \times S^1$ où F est plongé dans le disque et chaque composante de $V \cap K$ est de type $\{*\} \times S^1$, ou bien il existe une fibration de Seifert sur S^3 dont chaque composante de $V \cap K$ est une fibre et telle que V est le complémentaire d'un voisinage régulier d'un certain nombre de fibres.

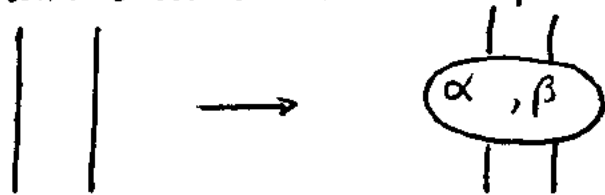
Si τ renverse l'orientation d'une fibre de V , on peut de la même façon recoller un certain nombre de tores pleins pour obtenir une variété de Seifert V' munie d'une involution fibrée τ' étendant τ telle que le quotient V'/τ' soit isomorphe à S^3 . Le lemme 5.2 montre alors que la base de V est de genre négatif ou nul, que toutes les fibres exceptionnelles sont stables par τ qui renverse leur orientation, que toutes les fibres stables isolées pour τ sont formées de points fixes et enfin que l'application induite par τ' dans la base de V' admet exactement un cercle de points fixes. Les méthodes de [Mo] qui correspondent à cette situation permettent alors de décrire V et $V \cap K$ de la façon suivante : Partons de S^3 munie d'une bande standard, c'est à dire d'un plongement de $S^1 \times I$ dans S^3 tel que $S^1 \times \{0\}$ soit non noué et que le nombre d'enlacement de $S^1 \times \{0\}$ et de $S^1 \times \{1\}$ soit nul. On s'autorise à modifier le couple

$(S^3, S^1 \times I)$ par une succession des transformations 1) à 5) ci-dessous effectuées en des emplacements disjoints de la bande :

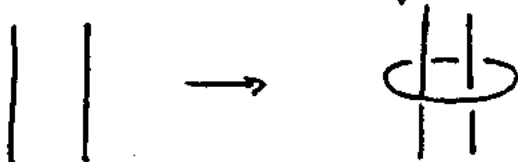
1) tordre la bande d'un certain nombre de demi-tours positifs (-3 dans l'exemple ci-dessous).



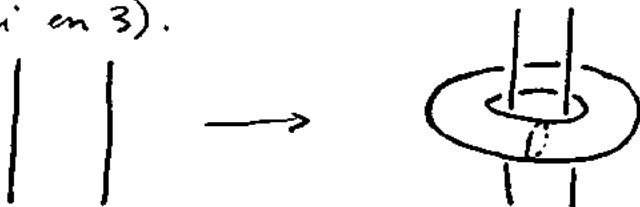
2) remplacer une portion de bande par un "tangle" rationnel (voir [GoI], [MoI]) d'invariants (α, β) où α et β sont premiers entre eux et $1 \leq \beta < \alpha$.



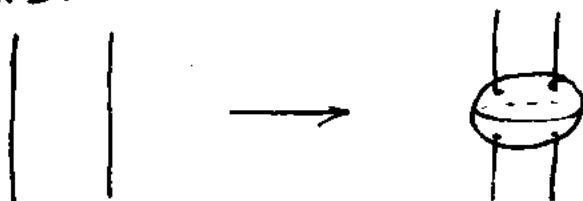
3) ajouter un cercle qui borde un disque dont l'intersection avec la bande le long de $\{*\} \times I$.



4) retirer le voisinage régulier d'un cercle du type défini en 3).



5) retirer un voisinage régulier d'un segment du type $\{*\} \times I$.



On obtient ainsi une sous-variété V de S^3 , munie d'une sous-variété de dimension 1, du type de celle représentée sur la figure 1. Rappelons que le nombre de demi-tours effectués en 1) est égal à "l'obstruction b " ayant servi à classifier la fibration de Seifert sur V , que les "tangles" rationnels et les invariants (α, β) correspondent aux fibres exceptionnelles et à leurs invariants de Seifert, que les cercles rajoutés en 3) sont les fibres de points fixes de τ (ce qui ne se produit que quand la base de V est non orientable) et que les composantes de ∂V introduites en 4) (resp. en 5)) se relèvent en des composantes de ∂V sur lesquelles la restriction de τ n'admet pas de points fixes (resp. admet 4 points fixes).

Considérons donc V et $V \setminus K$ du type ci-dessus. Soient k_1 le nombre de composantes de ∂V qui sont des sphères, k_2 (resp. k_3) le nombre de composantes de ∂V qui sont des tores $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -homologiquement non enlacés avec K (resp. $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -homologiquement enlacés avec K), l le nombre de composantes de $V \setminus K$ introduites par la modification 3) et $b \in \mathbb{Z}$ nul si $k_1 \neq 0$ ou sinon égal au nombre de demi-tours positifs effectués sur la bande par la modification 1). Le genre de la base de V est alors égal à $-(k_3 + l)$ et ∂V possède $(k_1 + 2k_2 + k_3)$ composantes. En outre, les résultats du chapitre précédent montrent que la restriction de τ à V est entièrement déterminée par les données ci-dessus et "l'ordre" dans lequel sont effectués les modifications 2) et 5) sur la bande. Pour formaliser ceci, faisons choix d'une orientation et d'un point base sur l'âme $S^1 \times \{0\}$ de la bande $S^1 \times I$ et, pour toute modification de type 2) ou 5), d'un point $a_i \in S^1 \times \{0\}$ "au voisinage duquel a lieu la modification". Numérotons les a_i dans l'ordre défini par l'orientation choisie et à partir du

point base. Pour tout i , soit enfin (α_i, β_i) égal à l'invariant (α, β) du "tangle" rajouté si la modification en a_i est de type 2) ou égal à $(*, *)$ sinon. Le couple formé de V et de la restriction de τ à V est alors déterminé à équivalence près par l'élément

$(-(k_3 + l), (k_1 + 2k_2 + k_3) | b; (\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), \dots, (\alpha_n, \beta_n))$
 défini modulo les transformations qui opèrent des permutations circulaires sur les (α_i, β_i) ou échangent pour tout i (α_i, β_i) et $(\alpha_{n-i}, \beta_{n-i})$ (transformations correspondant aux changements de point base et d'orientation sur $S^1 \times \{0\}$).

B. Surfaces $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -essentielles.

irréductible et 2-irréductible

Dans tout ce paragraphe, M' sera une variété 3-dimensionnelle éventuellement avec bord munie d'une involution τ' dont l'ensemble des points fixes sera désigné par K' . Enfin, M'_0 sera l'espace quotient M'/τ' .

Une surface dans M'_0 sera dite $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -essentielle si son image réciproque dans M' est une surface essentielle. Nous porterons un intérêt tout particulier aux surfaces de M'_0 dont l'image réciproque dans M' est formée de tores ou d'anneaux.

LEMME 5.3. Soit F une surface dans M'_0 qui est un tore ne rencontrant pas K' ou une sphère intersectant K' en exactement 4 points. F est $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -essentielle si et seulement si elle ne borde ni un tore plein ne rencontrant pas K' , ni un tore plein qui est un voisinage régulier d'une composante de K' , ni une boule B telle que $B \cap K'$ est formé de deux segments non noués et non enlacés dans B .

LEMME 5.4 . Soit F une surface dans M' qui est un anneau ne rencontrant pas K' ou un disque intersectant K' en exactement un point. La surface F est $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -essentielle si et seulement si aucune des conditions (i) (i) ci-dessous n'est réalisée.

(i) il existe un plongement de $D^2 \times I$ dans M' tel que $(D^2 \times I) \cap F$ soit égal à $S^1 \times I$, que $(D^2 \times I) \cap \partial M'$ soit égal à $D^2 \times \partial I$ et que $(D^2 \times I) \cap K'$ soit ou bien vide, ou bien égal à $D^2 \times \{0\}$

(ii) il existe un plongement de $(S^1 \times I \times I) / (S^1 \times \partial I \times I)$ dont les intersections avec F et $\partial M'$ sont respectivement égales à $S^1 \times I \times \{+1\}$ et $S^1 \times I \times \{-1\}$ et ne rencontrant pas K' .

(iii) il existe une boule B dans M' telle que F soit inclus dans ∂B , que $(\partial B - F)$ soit inclus dans $\partial M'$ et que $B \cap K'$ soit formé d'un ou deux segments non noués et non enlacés dans B .

Démonstrations: Les surfaces F se relevant en des tores ou des anneaux dans M' , les lemmes 5.3 et 5.4 sont des corollaires immédiats de la classification des involutions sur $D^2 \times I$ et $S^1 \times D^2$ obtenus aux lemmes 1.26 et 1.27. \square

Deux surfaces F et G dans M' seront dites $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -parallèles s'il existe un plongement de $F \times I$ dans M' dont l'intersection avec K' est une réunion de segments $\{*\} \times I$, dont l'intersection avec $\partial M'$ est égale à $\partial F \times I$ et tel que F et G soient respectivement égales à $F \times \{-1\}$ et $F \times \{+1\}$. Si F et G sont les images réciproques de F et G dans M' , il existe alors une déformation équivariante de M' qui amène F sur G . Réciproquement, on pourrait montrer à l'aide du lemme 1.29 que si F et G sont disjointes et F et G sont équivariamment isotopes, alors F et G

sont $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -parallèles.

c. La variété $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -caractéristique de K .

Ce paragraphe est essentiellement un dictionnaire traduisant dans S^3 muni de l'enlacement K les résultats obtenus aux chapitres précédents pour M muni de l'involution τ .

Une \mathcal{G} -variété V sera dite $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -essentielle si son bord est $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -essentiel. Elle sera dite $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -pleine si pour toute sous-variété W dont les composantes sont des composantes de $(S^3 - V)$, $V \cup W$ n'est pas une \mathcal{G} -variété.

Une variété $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -caractéristique de K sera une \mathcal{G} -variété $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -essentielle et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -pleine V telle que toute \mathcal{G} -variété $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -essentielle peut être amenée à l'intérieur de V par une isotopie de S^3 laissant stable K .

Il est clair que V est une variété $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -caractéristique si et seulement si son image réciproque dans M est une variété équivariamment caractéristique. Le théorème 2.6 d'existence et d'unicité de la variété équivariamment caractéristique s'exprime alors de la façon suivante.

THEOREME 5.5. L'enlacement K admet au moins une variété $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -caractéristique et celle-ci est unique à isotopie conservant K près.

La variété $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -caractéristique est ainsi un invariant géométrique (éventuellement vide) de l'enlacement K . En outre,

le théorème 4.2 permet en général de classifier cet invariant. En particulier, la combinaison des théorèmes 5.5 et 4.2, plus les résultats de [OVZ] pour traiter des exceptions de 4.2, permet d'obtenir une classification complète des enlacements arborescents irréductibles, que l'on peut définir comme les enlacements irréductibles dont le complémentaire de la variété $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -caractéristique est un voisinage régulier d'une réunion disjointe de sphères intersectant chacune l'enlacement en exactement 4 points (voir aussi [Si]).

Nous terminerons en donnant une caractérisation plus maniable de la variété $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -caractéristique.

PROPOSITION 5.6. Une \mathcal{G} -variété V est

$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -caractéristique, si et seulement si elle est $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -essentielle, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ pleine, si $(S^3, \overset{\circ}{V})$ ne contient aucun anneau ou ruban de Moebius F tel que $F \cap K = \emptyset$, et si toute surface $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -essentielle proprement plongée dans $(S^3, \overset{\circ}{V})$ et appartenant à l'un des types (i) à (iv) ci-dessous est $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -parallèle à une composante de ∂V ou contenue dans une composante de $(S^3, \overset{\circ}{V})$ qui est un voisinage régulier d'une surface de type (i) ou (ii).

- (i) \mathcal{G} est un tore ne rencontrant pas K .
- (ii) \mathcal{G} est une sphère intersectant K en exactement 4 points.
- (iii) \mathcal{G} est un anneau ne rencontrant pas K .
- (iv) \mathcal{G} est un disque rencontrant K en exactement 2 points.

(Remarquons que les lemmes 5.3 et 5.4 fournissent un moyen de reconnaître si \mathcal{G} est $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -essentielle ou non.)

Démonstration : Soit V l'image réciproque de V dans le revêtement double ramifié M de K , muni de l'involution de revêtement τ . La proposition est clairement équivalente à

la suivante: Si V est équivariamment pleine et essentielle, V est équivariamment caractéristique si et seulement si $(M - \overset{\circ}{V})$ ne contient aucun tore que τ laisse stable en renversant son orientation, et chaque composante d'une surface équivariante essentielle de $(M - \overset{\circ}{V})$ qui est un tore ou un anneau est parallèle à une composante de ∂V ou contenue dans une composante de $(M - \overset{\circ}{V})$ isomorphe à $S^1 \times S^1 \times I$.

Si V est équivariamment caractéristique, il ne peut exister dans $(M - \overset{\circ}{V})$ de tore T que τ laisse stable en renversant son orientation car sinon $U(T)UV$ serait une S -variété essentielle équivariamment pleine de complexité strictement supérieure à celle de V , ce qui contredirait la proposition 2.7; le lemme 3.3 achève alors la démonstration de la nécessité de la condition ci-dessus.

Réciproquement, si V n'est pas équivariamment isotope à la variété caractéristique V_0 , on peut déformer équivariamment celle-ci de sorte que $V \subset \overset{\circ}{V}_0$. En outre, d'après le corollaire 1.40, on peut choisir la structure de S -variété sur V_0 de sorte que ∂V soit verticale. Puisque V est équivariamment pleine, il n'existe aucune composante de $\overline{V_0 - V}$ isomorphe à $S^1 \times S^1 \times I$ dont le bord est inclus dans ∂V . D'autre part, V n'étant pas équivariamment isotope à V_0 , il existe une composante de $\overline{V_0 - V}$ qui n'admet aucun isomorphisme avec $S^1 \times S^1 \times I$ tel que $S^1 \times S^1 \times \{+1\} \subset \partial V_0$ et $S^1 \times S^1 \times \{-1\} \subset \partial V$. On peut alors aisément construire une surface verticale essentielle dans $\overline{V_0 - V}$ dont le bord est inclus dans ∂V , qui est stable par τ et dont chaque composante est soit un tore dont τ renverse l'orientation, soit un tore non parallèle à une composante de ∂V , soit un anneau non contenu dans

une composante de $\overline{V_0 - V}$ isomorphe à $S^1 \times S^1 \times I$ (et donc non contenu dans une composante de $\overline{M - V}$ isomorphe à $S^1 \times S^1 \times I$). Ceci achève la démonstration. \square

REFERENCES

- [Co] J. H. CONWAY, *An enumeration of knots and links and their algebraic properties*, *Computational problems in abstract algebra*, Pergamon Press, New York (1970), 329-358.
- [Ha] W. HAKEN, *Some results on surfaces in 3-manifolds*, *Studies in modern topology*, Prentice Hall (1968).
- [He] J. HEMPEL, *3-manifolds*, *Annals of Math. Studies 86*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey (1976).
- [Hu] J. F. P. HUDSON, *Piecewise linear topology*, Benjamin, New York, Amsterdam (1969).
- [JS] W. JACO, P. B. SHALEN, *Peripheral structure of 3-manifolds*, preprint.
- [Jo1] K. JOHANNSON, *Equivalences d'homotopies des variétés de dimension 3*, *C. R. Acad. Sci., Paris*, 281, serie A (1975), 1009-1010.
- [Jo2] K. JOHANNSON, *Homotopy equivalences of knot spaces*, Univ. Bielefeld (1976).
- [Jo3] K. JOHANNSON, *Homotopy equivalences of 3-manifolds with boundary*, Univ. Bielefeld (1976).
- [Mo] J. M. MONTESINOS, *Varietades de Seifert que son recubridores cíclicos de dos hojas*, *Bol. Soc. Mat. Mexicana* 18 (1973), 1-32.

- [Or] P. ORLIK, *Seifert manifolds*, Springer Lecture Notes 291 (1972).
- [OVZ] P. ORLIK, E. VOGT, H. ZIESCHANG, *Zur Topologie gefaseter dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten*, *Topology* 6 (1967), 49-64.
- [Si] L.C. SIEBENMANN, *Exercices sur les noeuds rationnels, polyèdre*, Orsay (1975).
- [Se] H. SEIFERT, *Topologie dreidimensionaler gefaseter Räume*, *Acta Math.* 60 (1933), 147-238.
- [To] J.L. TOLLEFSON, *Involutions of Seifert fiber spaces*, *Pacific Journal of Math.* 74 (1978), 519-529.
- [Wa1] F. WALDHAUSEN, *Eine Klasse von 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten I, II*, *Invent. Math.* 3 (1967), 308-333; 4 (1967), 87-117.
- [Wa2] F. WALDHAUSEN, *On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large*, *Ann. of Math.* 87 (1968), 56-88.
- [Wa3] F. WALDHAUSEN, *Involutions der 3-Sphäre*, *Topology* 8 (1969), 81-91.

N° d'impression 386
4e trimestre 1979